Arnold KAUFMANN
Ex-profesor del Instituto
Politécnico de Grenoble

Jaime GIL ALUJA
Catedrático de la Universidad
de Barcelona

MODELOS PARA LA INVESTIGACION DE EFECTOS OLVIDADOS

EDITORIAL MILLADOIRO

MODELOS PARA LA INVESTIGACION DE EFECTOS OLVIDADOS

Arnold KAUFMANN
Ex-profesor del Instituto
Politécnico de Grenoble

Jaume GIL ALUJA
Catedrático de la Universidad
de Barcelona

Imprime: PUGALSA, S.A.
Gandariña, 124 - Tel.: 27 21 21
Vigo - 1988
I. S. B. N.: 84-404-3657-2
Dep. Leg.: VG. 303/88

INDICE

PARTE I
ELEMENTOS TEORICOS

CONSIDERACIONES INICIALES

Siempre y en todo momento se han cometido errores y descuidos, como consecuencia del olvido o la negligencia. No somos más que seres humanos, inteligentes pero no siempre fiables. Incluso con la ayuda de las más potentes máquinas para el tratamiento de la información el riesgo del olvido no desaparecerá jamás de manera exhaustiva. De la agenda al banco de datos, disponemos de medios a menudo eficaces para paliar los fallos de nuestra memoria y nuestras negligencias. Sin embargo hay que enfrentarse al olvido y a las negligencias siendo conscientes de que esta fauna no desaparecerá nunca en su totalidad. Cuando nuestro entorno se halla cargado de las tecnologías más diversas hay que buscar de manera preventiva en profundidad, para conocer las relaciones de causa a efecto que resultan desagradablemente peligrosas e incluso mortales.

Cuando aparecen secuencias de incidencias, de inferencias, de consecuencias, se situan en una red que normalmente no es tratada correctamente. Frecuentemente tratamos dos o tres escalones del razonamiento, pero no siempre de manera fácil. Para mejorar nuestra competencia en la investigación de efectos olvidados o descuidados, se cuenta con los ordenadores, aunque también a ellos hay que protegerlos de la malicia humana. Para utilizar los ordenadores en la búsqueda de los efectos olvidados (obtención evidentemente no exhaustiva) hacen falta modelos matemáticos; esta obra pretende presentar un inventario de diversos modelos.

Todos nosotros nos hallamos incorporados en sistemas y subsistemas de naturaleza diversa: económica, educativa, sindical, asociativa, tecnológica, relacional; el mundo que nos rodea no es más que sistemas y subsistemas. Aunque se pueden establecer buenas listas de control (check lists) tanto para el despegue de un avión o la puesta en marcha de una calefacción, existe siempre un cierto riesgo de negligencia, o de imprudencia, que conviene evitar. Los riesgos no son siempre explícitos, visibles o percibidos de manera inmediata; sucede a veces, y son los más terribles, que se hallan ocultos, que no son otra cosa que efectos de efectos, de una acumulación de causas. La inteligencia humana precisa la colaboración de todo lo posible para la seguridad de todos y cada uno de nosotros.

Los métodos y modelos que vamos a presentar no coinciden con los que tratan la fiabilidad y los árboles de averia, sinó que se situan en un estrato anterior y a veces se les asocian.

Los modelos que se van a utilizar para la búsqueda de los efectos olvidados son muy frecuentemente grafos con valores binarios en los arcos o los vértices; en general se pueden considerar este tipo de grafos valuados a través de números en [0,1] o intervalos de confianza de [0,1]. Se utiliza, según las necesidades, la teoría booleana o la teoría de los subconjuntos borrosos, o también la de los "expertones". Estos modelos no son ni de difícil comprensión ni de programación, pero pueden comportar millares de datos, lo cual no asusta a los técnicos en informática de nuestros dias.

Aunque los potenciales utilizadores de esta obra conozcan la teoría matemática de grafos es posible que algunos hayan olvidado ciertas propiedades; las vamos a recordar en los momentos oportunos.

Los métodos de creatividad y los métodos de investigación de los efectos olvidados son susceptibles de frecuente asociación, se complementan. Todo grupo de mandos debe tranformarse periódicamente mediante círculos de creatividad y círculos de seguridad. El gran ingeniero y economista FOURASTIE ha denominado "efectos de segunda generación" a estos efectos olvidados cuando se refieren sobre todo a las decisiones políticas y económico-sociales y ha señalado los peligros que entrañan. Por nuestra parte creemos en estos peligros y desearíamos que se mejorara la vigilancia en todos los ámbitos.

No se debe pretender que los métodos presentados consigan que no existan olvidos, sería iluso suponerlos así. Resulta ya importante eliminar progresivamente lo que se olvida y esto hay que hacerlo sin pausa; van a aparecer en los sistemas nuevas causas de problemas ocultos. Será necesario transformar o alargar la lista, modificar las valuaciones de inferencia, adaptar cada vez mejor el conocimiento a la realidad.

El determinismo no es adaptable en la aventura humana, de las empresas, de las naciones, de la humanidad. La concepción mecanicista de los sistemas complejos han dado ya de sí todo lo que se podía esperar. Todo es evolutivo y adaptativo, resulta más difícil pero extremadamente interesante.

Esta pequeña obra no pretende ser una biblia sobre este tema, sinó una modesta contribución que debería ser útil en esta época informatizada y mediatizada. Sucesos, sensaciones, informaciones, constituyen la vida misma. Y vivir con su parte de consciencia y de control, resulta mejor, mucho mejor.

La importancia de los efectos de 2ª. , 3ª. , ... generación se hace notar en todos los ámbitos de decisión, tanto en el campo político, económico y empresarial como en el de la medicina, biología, etc... En las páginas que siguen vamos a presentar unas aplicaciones de los esquemas que hemos estudiado hasta ahora, las cuales han sido elaboradas a partir de trabajos cuyos datos provienen de la estimación de expertos en cada una de las áreas a que se refieren. Es evidente que no pretendemos una acepción total de las cifras presentadas. Incluso se producirán discrepancias importantes. No puede ser de otra manera si tenemos en cuenta que los posibles lectores pertenecerán a espacios socio-económicos distintos y, sobre todo, no olvidemos que se trata de convertir en números... impresiones subjetivas. Sin embargo creemos que el esfuerzo realizado ha valido la pena, porque a través de él se nos ha presentado un amplio horizonte de investigación.

MODELOS QUE UTILIZAN EL CONCEPTO DE INCIDENCIA

MODELOS QUE UTILIZAN EL CONCEPTO DE INCIDENCIA

1.- INTRODUCCION

El concepto de incidencia se halla asociado a la idea de efecto de un conjunto de entidades sobre otro conjunto de entidades o sobre si mismo. Así el buen tiempo tiene una incidencia sobre la venta de vestidos de verano (favorable), sobre la venta de paraguas (desfavorable) y sobre la frecuentación de los cines (desfavorable). De hecho el concepto de incidencia puede estar ligado al de función que todos conocemos. Vamos a servirnos de él pasando de lo más simple (una incidencia existe o una incidencia no existe) para dirigirnos hacia intepretaciones más complicadas en las que se introducen los matices del pensamiento humano.

El concepto de incidencia que se encuentra en todas las acciones de los seres vivos es una noción aparentemente muy simple pero que merece ser explicada brevemente de manera científica pues es tan natural, que se olvida con frecuencia de tenerla en consideración al reflexionar, ya que es practicamente automático en el pensamiento. Pero las incidencias se propagan en una red de encadenamientos en la cual se omiten muchas etapas y se olvidan conclusiones, separadas más o menos voluntariamente. Incluso cuando se trata de un grupo de comunicación, se produce el olvido y estos olvidos conducen frecuentemente a efectos secundarios desfavorables en relación con las decisiones tomadas. Esto que forma parte de la vida cotidiana constituye también el acompañamiento de las decisiones de los más altos ejecutivos.

En la época de la informática y de los sistemas expertos, para evolucionar mejor en la incertidumbre, para protegerse mejor, es conveniente preveer, y preveer es explorar mejor las incidencias.

La incidencia es una noción subjetiva, es en general dificilmente mensurable y si se le aplica en ciertos casos las probabilidades resultan raramente justificadas correctamente. Pero el examen de las incidencias, concebibles incluso subjetivamente, permite la acción razonada.

Las matemáticas que van a ser utilizadas en los modelos propuestos serán siempre simples, explicadas y comentadas. Y estos modelos, muy fáciles de programar en cualquier lenguaje.

2.- Incidencias de primer orden

Partamos de un ejemplo muy simple. Sea A un conjunto de entidades:

(2.1) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

que tiene una incidencia sobre otro conjunto de entidades:

(2.2) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

Se dirá que existe una incidencia de a_i sobre b_j si el valor del par (a_i, b_j) es igual a 1 y que no existe incidencia si el valor de este par es igual a 0.

El conjunto de valores valuados de esta manera define lo que se va a llamar una "matriz de incidencia". Partamos, por ejemplo, considerando la incidencia del conjunto A sobre el conjunto B, de la matriz:

(2.3)

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	0	1
a_2	0	0	1	0
a_3	1	0	1	0
a_4	0	0	0	0
a_5	0	1	0	0

De esta manera, mediante la lectura de esta matriz será

$v(a_1, b_3) = 0$, $v(a_1, b_4) = 1$, $v(a_2, b_3) = 1$,
$v(a_5, b_3) = 0$.

Una matriz de este tipo se representa fácilmente a través de lo que se llamará un "grafo de incidencia" (figura 2.1). Se advierte que exite en la matriz (2.3) una entidad a_4 que no tiene incidencia alguna sobre un elemento de B

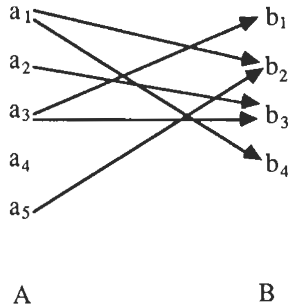


Figura 2.1

Los matemáticos llaman al concepto que acabamos de describir una "aplicación de A en B". Todavia podemos utilizar otra representación no numérica indicando cuales son los elementos de B para los que tiene una incidencia un elemento de A:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma\ \{a_1\} = \{b_2\,, b_4\}\\
&\Gamma\ \{a_2\} = \{b_3\}\\
&\Gamma\ \{a_3\} = \{b_1\,, b_3\}\\
&\Gamma\ \{a_4\} = \emptyset\\
&\Gamma\ \{a_5\} = \{b_2\}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

El símbolo $\emptyset$ llamado "vacio" significa aquí que a_4 no tiene incidencia alguna sobre uno cualquiera de los elementos de B.

Si a_i tiene una incidencia sobre b_j se dirá reciprocamente que b_j se halla "influenciado" por a_i. Si en la matriz de incidencia (2.3) se sustituyen las filas por las columnas y recíprocamente se obtendrá la recíproca de (2.3) que va a llamarse "matriz de influencias", que para nuestro ejemplo será:

(2.5)

B \ A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1			1		
b_2	1				1
b_3		1	1		
b_4	1				

Basta con invertir el sentido de las flechas de la figura 2.1 para obtener el "grafo de influencias" y para la notación (2.4) la utilización del símbolo

(2.6)
$$\Gamma^{-1}\{b_1\} = \{a_3\}$$
$$\Gamma^{-1}\{b_2\} = \{a_1, a_5\}$$
$$\Gamma^{-1}\{b_3\} = \{a_2, a_3\}$$
$$\Gamma^{-1}\{b_4\} = \{a_1\}$$

Después de este ejemplo vamos a generalizar. Se considera un conjunto finito A de entidades:

(2.7) $$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

que tiene una incidencia sobre otro conjunto finito B de entidades:

(2.8) $$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

Se dirá que $a_i \in A$ tiene una influencia sobre $b_j \in B$ si el par (a_i, b_j) tiene el valor 1 y en el caso de no incidencia el valor 0. La matriz formada por los valores de todos los pares se llama "matriz de incidencia" y la que está formada por los valores de los pares (b_j, a_i) (la recíproca) la "matriz de influencias".

Veamos un ejemplo concreto que no aconsejamos se utilice ya que resulta demasiado difícil evaluar la incidencia con sólo 0 (no incidencia) y 1 (incidencia).

Pero este apartado no es más que un paso hacia modelos realmente utilizables. Para un automóvil destinado al gran público se consideran 6 propiedades tecnológicas o comerciales

(2.9)

a_1 = la potencia
a_2 = la velocidad punta
a_3 = la suspensión
a_4 = el consumo
a_5 = el precio
a_6 = la calidad del frenado

y 5 cualidades apreciadas por los conductores:

(2.10)

b_1 = la estabilidad en carretera
b_2 = la seguridad
b_3 = el confort
b_4 = el prestigio social
b_5 = la fiabilidad

Un conductor podría valuar de la siguiente manera la matriz de incidencia.

(2.11)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1		1		1	
a_2				1	
a_3	1	1	1		
a_4			1		
a_5				1	
a_6	1	1			1

Es, evidentemente, una valuación posible de un conductor y si sólo se establece la valuación con 0 y 1 resulta difícil de expresar y de tratar.

Hay que observar que varios elementos de A podrían encontrarse en B y recíprocamente.

En ciertos casos los conjuntos A y B coinciden; en este caso resulta necesario que la diagonal principal de la matriz de incidencia se halle formada por 1 ya que toda entidad tiene una incidencia total sobre ella misma, por hipótesis.

Veamos un ejemplo de una matriz de incidencia en donde A = B.

$$a_1 = \text{clima}$$
$$a_2 = \text{agricultura}$$
$$a_3 = \text{sanidad} \tag{2.12}$$
$$a_4 = \text{industria}$$
$$a_5 = \text{educación}$$

$$b_1 = \text{clima}$$
$$b_2 = \text{agricultura}$$
$$b_3 = \text{sanidad} \tag{2.13}$$
$$b_4 = \text{industria}$$
$$b_5 = \text{educación}$$

Un economista podría valuar de la siguiente manera la incidencia de A sobre B.

(2.14)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1	0
a_3	0	0	1	0	1
a_4	1	1	0	1	0
a_5	0	0	1	1	1

Resulta evidente que este tipo de matrices de incidencia mientras sí son reflexivas (la diagonal principal se halla formada de 1) no son simétricas o lo son raramente. Por ejemplo el clima tiene una incidencia en la agricultura y la agricultura no lo tiene sobre el clima. Se observa aquí la dificultad que existe de poder responder sin matices ni comentarios cuando sólo se utilizan 0 y 1.

Cuando sólo se utiliza una matriz de incidencia se dirá que el análisis se ciñe a una incidencia de primer orden. Pasemos a examinar ahora lo que llamaremos una incidencia de segundo orden.

3.- Incidencias de segundo orden y superiores

Consideremos la incidencia de un conjunto A sobre un conjunto B y la incidencia de este conjunto B sobre un tercer conjunto C en los que, por ejemplo:

(3.1) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

(3.2) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

(3.3) $C = \{c_1, c_2, c_3\}$

Se establecen las incidencias representadas por las matrices (3.4) y (3.5) y los grafos de incidencia correspondientes (figuras 3.1 y 3.2)

(3.4)

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1			1	
a_2		1		1	1
a_3					1
a_4				1	

(3.5)

B \ C	c_1	c_2	c_3
b_1	1		
b_2			
b_3	1	1	
b_4		1	1
b_5	1		

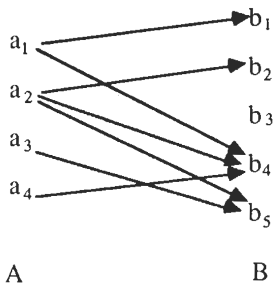


Figura 3.1

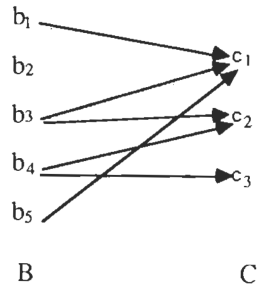


Figura 3.2

Examinando ahora la figura 3.3 se pueden conocer las incidencias de orden 2, es decir aquellas que constituyen las incidencias de los elementos de A sobre los de C por mediación de B.

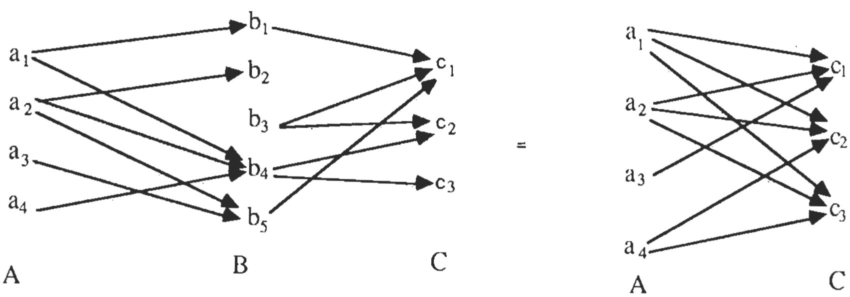


Figura 3.3

A partir de esta figura 3.3 se obtiene la siguiente matriz de incidencia de orden 2

$$(3.6)\qquad \begin{array}{c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 1 & & \\ \hline a_4 & & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Se tiene pues, utilizando el simbolismo empleado en (2.4):

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} \Gamma_{AB}\{a_1\} &= \{b_1, b_4\} \\ \Gamma_{AB}\{a_2\} &= \{b_2, b_4, b_5\} \\ \Gamma_{AB}\{a_3\} &= \{b_5\} \\ \Gamma_{AB}\{a_4\} &= \{b_4\} \end{aligned}$$

$$(3.8)\qquad \begin{aligned} \Gamma_{BC}\{b_1\} &= \{c_1\} \\ \Gamma_{BC}\{b_2\} &= \emptyset \\ \Gamma_{BC}\{b_3\} &= \{c_1, c_2\} \\ \Gamma_{BC}\{b_4\} &= \{c_2, c_3\} \\ \Gamma_{BC}\{b_5\} &= \{c_1\} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (3.6)

$$(3.9)\qquad \begin{aligned} \Gamma_{AC}\{a_1\} &= \{c_1, c_2, c_3\} \\ \Gamma_{AC}\{a_2\} &= \{c_1, c_2, c_3\} \\ \Gamma_{AC}\{a_3\} &= \{c_1\} \\ \Gamma_{AC}\{a_4\} &= \{c_2, c_3\} \end{aligned}$$

La operación matemática que permite conocer la incidencia de A sobre C conociendo la incidencia de A sobre B y de B sobre C se llama una "composición máximo-mínimo" o de manera más simple "composición maxmin". Posteriormente vamos a proporcionar la correspondiente fórmula. Analicemos primero la figura 3.3 . Si existe una tripleta (a_1, b_i, c_1) existirá un par (a_1, c_1) como sucede en este caso. Existe también una tripleta (a_1, b_i, c_2) y por tanto un par (a_1, c_2), ... , no existe una tripleta (a_3, b_i, c_3) (no existe un camino a a_3 a c_3) por lo que no hay el par (a_3, c_3)... y así sucesivamente. De esta manera se ha formado la figura 3.3 de la derecha y de ella la matriz de incidencia de orden 2 desde A hacia C.

Proporcionemos ahora la fórmula matemática que permita construir la matriz (3.6) a partir de las matrices (3.4) y (3.5). Vamos a utilizar la siguiente notación.

En la matriz (3.4), si la valuación de la casilla (a_1, b_1) es 1 se escribirá $\mu\ (a_1, b_1)=1$. en donde μ es la valuación. En la casilla (a_1, b_2) se obtiene un 0 (la casilla vacia representa el 0) y se escribirá $\mu\ (a_1,b_2) = 0$. En la casilla (a_1,b_3) también $\mu\ (a_1, b_3) = 0$. En la casilla (a_1,b_4) se escribirá $\mu\ (a_1, b_4) = 1$ y en la casilla (a_1, b_5) se escribirá $\mu\ (a_1, b_5) = 0$. En la casilla (a_2, b_1) se tiene $\mu\ (a_2, b_1) = 0$, y así sucesivamente, siempre de la misma manera. Se actuará identicamente para la matriz (3.5)

Vamos a introducir ahora dos símbolos operativos: $\wedge$ que significa mínimo (el más pequeño de los dos) y $\vee$ que significa máximo (el más grande de los que se consideran).

Con esta notación busquemos qué valuación habrá que dar a (a_1, c_1):

$$\begin{aligned}
\mu\ (a_1, c_1) = &(\mu\ (a_1 , b_1) \wedge \mu\ (b_1, c_1))\\
&\vee (\mu\ (a_1 , b_2) \wedge \mu\ (b_2 , c_1))\\
&\vee (\mu\ (a_1 , b_3) \wedge \mu\ (b_3 , c_1))\\
&\vee (\mu\ (a_1 , b_4) \wedge \mu\ (b_4 , c_1))\\
&\vee (\mu\ (a_1 , b_5) \wedge \mu\ (b_5 , c_1))\\
&= (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) =\\
&1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1
\end{aligned}$$

y para (a_1 , c_2)

$$\begin{aligned}
\mu\ (a_1, c_2) = &(\mu\ (a_1 , b_1) \wedge \mu\ (b_1, c_2))\\
&\vee (\mu\ (a_1 , b_2) \wedge \mu\ (b_2 , c_2))\\
&\vee (\mu\ (a_1 , b_3) \wedge \mu\ (b_3 , c_2))\\
&\vee (\mu\ (a_1 , b_4) \wedge \mu\ (b_4 , c_2))\\
&\vee (\mu\ (a_1 , b_5) \wedge \mu\ (b_5 , c_2))\\
&= (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) =
\end{aligned}$$

$$0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1$$

....

y para (a_3, c_3):

$$\mu(a_3, c_3) = (\mu(a_3, b_1) \wedge \mu(b_1, c_3)) \vee (\mu(a_3, b_2) \wedge \mu(b_2, c_3))$$
$$\vee (\mu(a_3, b_3) \wedge \mu(b_3, c_3))$$
$$\vee (\mu(a_3, b_4) \wedge \mu(b_4, c_3))$$
$$\vee (\mu(a_3, b_5) \wedge \mu(b_5, c_3))$$
$$= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) =$$
$$0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$$

y ello para todos los elementos de A, de B y de C. Lo que hemos hecho se resume por la fórmula:

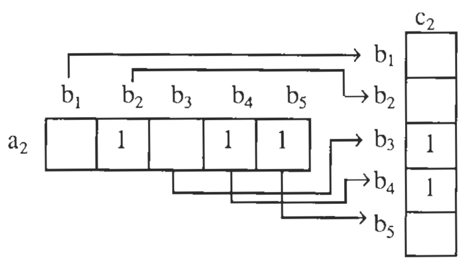
Para todas las a_i, b_j y c_k, $i = 1, 2, 3, 4$
$j = 1, 2, 3, 4, 5$
$k = 1, 2, 3$

(3.13) $$\mu(a_i, c_k) = \bigvee_j (\mu(a_i, b_j) \wedge \mu(b_j, c_k))$$

que representa la composición maxmin de la incidencia de A sobre C a partir de la incidencia de A sobre B y de la incidencia de B sobre C.

También es posible utilizar un medio visual muy sencillo considerando las filas y las columnas de las matrices. Asi, tomando la fila a_2 de (3.4) y la columna c_3 de (3.5), resulta:

(3.14)



$$\rightarrow (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) =$$
$$= \begin{array}{cc} & c_2 \\ a_2 & \boxed{1} \end{array}$$

Se utilizará, si se considera necesario la palabra mnemotécnica FICO (filas por columnas) (1)

Veamos cual puede ser la utilidad de obtener una incidencia de orden 2. Evidentemente más adelante lo veremos con mayor detalle; por el momento vamos a contentarnos con un sencillo ejemplo a modo de introducción.

Supongamos que la (o las) personas que deben valuar las incidencias elementales han proporcionado de manera directa las incidencias de A con respecto a C mediante la siguiente matriz:

$$
(3.15) \qquad
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & c_1 & c_2 & c_3 \\
\hline
a_1 & 1 & & 1 \\
\hline
a_2 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_3 & 1 & & \\
\hline
a_4 & & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

Luego, mediante razonamiento o explotando los conocimientos haciendo intervenir B, se valua A con B tal como se ha hecho en (3.4) y B con C como en (3.5). Comparando (3.6) y (3.15) la persona que ha valuado se dará cuenta que ha cometido olvidos o mal valuado (3.15). En efecto los pares (a_1, c_2) y (a_4, c_3) tienen un valor 0 en (3.15) y el valor 1 en (3.6). Se dirá que los efectos (a_1, c_2) y (a_4, c_3) han sido "efectos olvidados". Puede también darse el caso, por el contrario, que un par sea valuado 1 en (3.15) y 0 en (3.6). En este caso resulta conveniente volver a analizar (3.15) en lo que concierne a la incidencia asignada.

Se observa así, en este ejemplo, que resulta necesario verificar la subjetividad cuando se valuan las incidencias y si se supone que en estas incidencias intervienen entidades intermedias. Se observa en el ejemplo de la figura 3.3 que (a_1, c_2) hubiera debido adquirir el valor 1 en (3.15) ya que (a_1, b_4) tiene el valor 1 y (b_4, c_2) también. De igual modo (a_4, c_2) hubiera debido tener el valor 1 en (3.15) ya que (a_4, b_4) y (b_4, c_2) tienen el valor 1.

Estamos ahora en condiciones de avanzar en nuestro esquema y considerar las incidencias de orden 3, de orden 4,... en donde $\mathcal{M}_{AB}$ es una matriz de incidencia de A hacia B, $\mathcal{M}_{BC}$ una matriz de incidencia de B hacia C, $\mathcal{M}_{CD}$ una matriz de incidencia de C hacia D, ... La composición maxmin dada por la fórmula matemática (3.13) deberá ser repetida tantas veces como resulte necesario.

Para simplificar la lectura representaremos la composición maxmin mediante el símbolo $\circ$; de esta manera (3.13) quedará simbolizado por:

(1) En francés LICO (lignes par colonnes)

(3.16) $\mathfrak{M}_{AC} = \mathfrak{M}_{AB} \circ \mathfrak{M}_{BC}$

y si se considera una incidencia de orden 3, se escribirá:

(3.17) $\mathfrak{M}_{AD} = \mathfrak{M}_{AB} \circ \mathfrak{M}_{BC} \circ \mathfrak{M}_{CD}$

Señalando que la composición maxmin es asociativa, es decir que:

(3.18) $\mathfrak{M}_{AB} \circ (\mathfrak{M}_{BC} \circ \mathfrak{M}_{CD}) = (\mathfrak{M}_{AB} \circ \mathfrak{M}_{BC}) \circ \mathfrak{M}_{CD}$

Se trata de una propiedad muy conocida en el cálculo matricial cuando son posibles las convoluciones en secuencias, como sucede en las matrices de incidencia.

Pedimos un poco de paciencia al lector que desea comprender la utilidad práctica de cuanto hemos expuesto.

4.- Utilización de matrices borrosas

En una relación borrosa $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ o matriz borrosa la valuación de un par $(x_i, x_j) \in R \subset A \times B$ en donde A y B son conjuntos o referenciales dados (conjuntos finitos en el supuesto de esta obra), en lugar de tomar un valor 0 ó 1 (no incidencia o incidencia) puede tomar todo valor entre 0 y 1, expresado de esta manera:

(4.1) $\forall (x_i, x_j) \in \underset{\sim}{\mathfrak{M}} \quad : \quad v(x_i, x_j) \in [0, 1]$

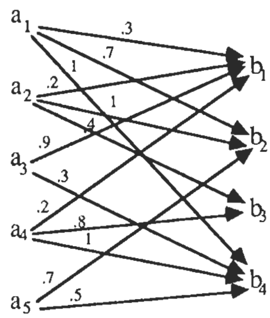
Si volvemos a tomar (2.1) y (2.2) se puede presentar una relación borrosa o subconjunto borroso de A X B de la siguiente manera:

(4.2)

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	.3	.7	0	1
a_2	.2	1	.4	0
a_3	.9	0	0	.3
a_4	.2	0	.8	1
a_5	0	.7	0	.5

En nuestro ejemplo (4.2) las valuaciones han sido presentadas con un sólo decimal a efectos de simplificación aunque se pueden tomar tantos decimales como se desee.

También se pueden utilizar diagramas de flechas o grafos, tal como el presentado en la figura 2.1; en este caso la ausencia de un arco indica que la incidencia tiene una valuación nula. De esta manera la matriz borrosa (4.2) será representada en la figura 4.1.



(figura 4.1)

La introducción de una valuación matizada entre 0 y 1 permite hacer intervenir niveles de verdad en la noción de incidencia. De esta manera se puede establecer la correspondencia semántica siguiente para 11 valores de 0 a 1 (la llamada valuación endecadaria).

(4.3)

0	:	sin incidencia
0.1	:	practicamente sin incidencia
0.2	:	casi sin incidencia
0.3	:	muy débil incidencia
0.4	:	débil incidencia
0.5	:	mediana incidencia
0.6	:	incidencia sensible
0.7	:	bastante incidencia
0.8	:	fuerte incidencia
0.9	:	muy fuerte incidencia
1	:	la mayor incidencia

Sin embargo, lo arbitrario de esta correspondencia puede impedir que sea aceptada por un suficiente número de personas, siendo quizás preferible la siguiente en la que se establece una correspondencia semántica con la ayuda del nivel de verdad de la proposición:

$\mathcal{P}$: existe una incidencia

con

(4.4)
$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{P}) &= 0 &&\text{, es falso}\\
&= 0.1 &&\text{, practicamente falso}\\
&= 0.2 &&\text{, casi falso}\\
&= 0.3 &&\text{, bastante falso}\\
&= 0.4 &&\text{, más falso que verdadero}\\
&= 0.5 &&\text{, ni verdadero ni falso}\\
&= 0.6 &&\text{, más verdadero que falso}\\
&= 0.7 &&\text{, bastante verdadero}\\
&= 0.8 &&\text{, casi verdadero}\\
&= 0.9 &&\text{, practicamente verdadero}\\
&= 1 &&\text{, verdadero}
\end{aligned}
$$

En el supuesto que una incidencia es mensurable en un segmento $[0,a]$ se tomará para esta incidencia, si $k \in [0,a]$

(4.5) $$v(\mathbf{P}) = \frac{k}{a}$$

y eventualmente si el segmento es $[a_1, a_2]$:

(4.6) $$v(\mathbf{P}) = \frac{k - a_1}{a_2 - a_1} \qquad k, a_1, a_2 \in R^+$$

Es posible utilizar relaciones más complicadas, cuando resulta necesario, en el supuesto de medidas cuya posición se halla en un segmento como el $[a_1, a_2]$

Volvamos a considerar, por ejemplo, la matriz de incidencia que se refiere a (2.9) y (2.10) pero en esta ocasión con una valuación borrosa, es decir matizada. Un conductor podría proporcionar la siguiente matriz borrosa:

(4.7)

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	.2	.7	.4	1	0
a_2	0	.2	.5	1	.6
a_3	1	1	1	0	.4
a_4	0	0	.4	0	.2
a_5	.6	.8	.7	1	.6
a_6	1	1	.3	0	.8

y para el ejemplo (2.12) y (2.13):

(4.8)

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	.9	.8	.1	.1
a_2	.1	1	.8	.3	.1
a_3	0	.1	1	.1	.4
a_4	.3	.2	.1	1	0
a_5	0	.3	.8	.8	1

Veremos más adelante las ventajas de la utilización de la valuación borrosa sobre la valuación binaria. Aunque ya puede adivinarse que la introducción de matizaciones permite un mejor reflejo del pensamiento.

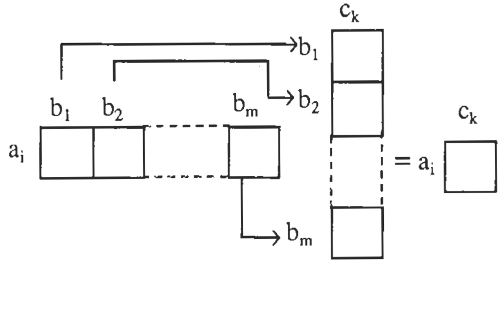
Pasemos ahora a estudiar las incidencias de segundo orden y superiores en el supuesto de matrices borrosas. Para ello se utilizará una vez más la composición max-min dada por (3.13) pero realizando un cambio de notación al utilizar $v(a_i, b_j)$ para la valuación de la incidencia de ai sobre b_j, e igualmente la letra v para la incidencia de b_j sobre c_k y de a_i sobre c_k.

Para todas las a_i, b_j y c_k:

(4.9) $$v\,(a_i\,,c_k) = \bigvee_j\,(\,v\,(a_i, b_j) \wedge v(b_j, c_k)\,)$$

o también utilizando el esquema de esta composición en (3.14):

(4.10)



En todo caso FICO:
filas por columnas.
Se toman los mínimos
y después el máximo
de los mínimos.

Un ejemplo de aplicación del esquema (2.17). Sean tres referenciales:

(4.11) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

(4.12) $B = \{b_1, b_2, b_3\}$

(4.13) $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$

y las dos matrices de incidencia borrosas:

(4.14) (4.15)

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB} = \begin{array}{c|c|c|c|} {}_{A}\diagdown^{B} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & 0 & .8 \\ \hline a_2 & 1 & 0 & .6 \\ \hline a_3 & .5 & .5 & .7 \\ \hline a_4 & .3 & 0 & .8 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{BC} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} {}_{B}\diagdown^{C} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \hline b_1 & .9 & 1 & 1 & .4 & 0 \\ \hline b_2 & .2 & .5 & .5 & .3 & .9 \\ \hline b_3 & .8 & .6 & .1 & .2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

La composición maxmin se calcula así:

$$\begin{aligned} v(a_1, c_1) &= v(a_1, b_1) \wedge v(b_1, c_1)) \vee (v(a_1, b_2) \wedge v(b_2, c_1)) \\ &\qquad \vee (v(a_1, b_3) \wedge v(b_3, c_1)) \\ &= (.3 \wedge .9) \vee (0 \wedge .2) \vee (.8 \wedge .8) = .8 \\ v(a_1, c_2) &= (v(a_1, b_1) \wedge v(b_1, c_2)) \vee (v(a_1, b_2) \wedge v(b_2, c_2) \\ &\qquad \vee (v(a_1, b_3) \wedge v(b_3, c_2)) \\ &= (.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge .5) \vee (.8 \wedge .6) = .6 \\ v(a_1, c_3) &= (.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge .5) \vee (.8 \wedge .1) = .3 \\ v(a_1, c_4) &= (.3 \wedge .4) \vee (0 \wedge .3) \vee (.8 \wedge .2) = .3 \\ v(a_1, c_5) &= (.3 \wedge 0) \vee (0 \wedge .9) \vee (.8 \wedge 0) = 0 \\ v(a_2, c_1) &= (1 \wedge .9) \vee (0 \wedge .2) \vee (.6 \wedge .8) = .9 \\ v(a_2, c_2) &= (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge .5) \vee (.6 \wedge .6) = 1 \end{aligned} \tag{4.16}$$

y así sucesivamente se obtiene:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{BC} = \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AC}$$

A \ B	b_1	b_2	b_3
a_1	.3	0	.8
a_2	1	0	.6
a_3	.5	.5	.7
a_4	.3	0	.8

4 x 3

$\circ$

B \ C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
b_1	.9	1	1	.4	0
b_2	.2	.5	.5	.3	.9
b_3	.8	.6	.1	.2	0

3 x 5

(4.17)

=

A \ C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
a_1	.8	.6	.3	.3	0
a_2	.9	1	1	.4	0
a_3	.7	.6	.5	.4	.5
a_4	.8	.6	.3	.3	0

4 x 5

Debajo de las matrices se ha indicado su número de filas y de columnas. Si $\mathfrak{M}_{AB}$ tiene ℓ filas y m columnas y $\mathfrak{M}_{BC}$ m filas y n columnas, $\mathfrak{M}_{AC}$ deberá tener ℓ filas y n columnas. De lo contrario la composición no sería posible.

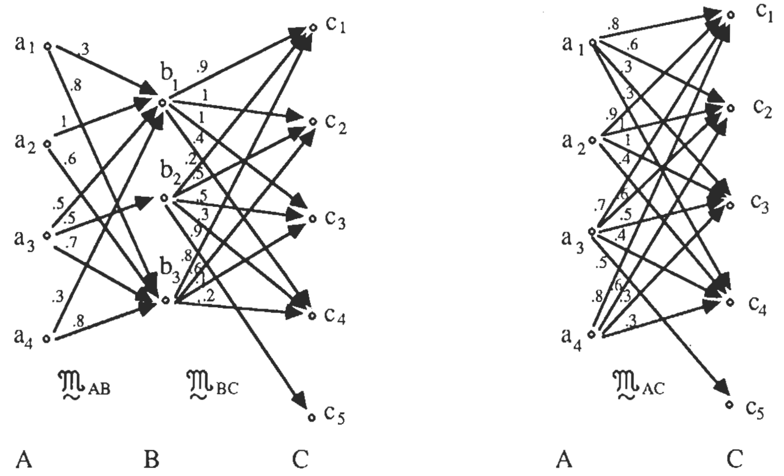
Veamos ahora distintas propiedades relativas a las matrices de incidencia tanto si son borrosas como binarias (el supuesto binario es un caso particular del borroso). Sean 3 matrices de incidencia:

$$\underset{\ell \times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \quad \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}} \quad \underset{n \times p}{\underset{\sim}{\mathcal{C}}}$$

(4.18) $\underset{\ell \times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}} \neq \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}} \circ \underset{\ell \times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}}$ imposible si $n \neq \ell$ y resultado distinto si $n = \ell$ excepto caso particular

(4.19) $\underset{\ell \times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ (\underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}} \circ \underset{n \times p}{\underset{\sim}{\mathcal{C}}}) = (\underset{\ell \times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}}) \circ \underset{n \times p}{\underset{\sim}{\mathcal{C}}}$, son asociativas

Más adelante veremos otras propiedades.
Presentemos ahora la composición (4.17) en forma de grafos:



(Figura 4.2)

Antes de estudiar otras propiedades de las matrices de incidencia veamos un ejemplo práctico para que el lector no se impaciente demasiado por ver la utilidad de nuestra exposición.

5.- Un ejemplo de investigación de efectos olvidados con ayuda de matrices de incidencia.

Este ejemplo ha sido adaptado a partir de una obra consagrada a los métodos de creatividad (1) y otra dedicada a métodos operativos de gestión en la incertidumbre (2). Aconsejamos a los lectores interesados en la investigación de efectos olvidados que se interesen también por los métodos de creatividad y demás métodos operativos ya que exite un parentesco próximo entre los diversos modelos en los que pueden intervenir los ordenadores gracias a su velocidad para el tratamiento de los problemas combinatorios.

El ejemplo presentado es una extensión a lo borroso de una matriz de inci-

(1) KAUFMANN, A. : Modèles mathématiques pour la stimulation inventive. Ed. Albin Michel
(2) KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. : Métodos operativos de gestión para el tratamiento de la incertidumbre. Ed. Hispano-Europea. Barcelona, 1987

dencia ternaria (tres niveles de valuación) presentada por Nicholas VALERY periodista y director de la revista New Scientist en Gran Bretaña. Esta extensión va a permitirnos poner de manifiesto como se utilizan las matrices de incidencia para la investigación de efectos olvidados o efectos de segunda generación. En este caso se consideran incidencias económicas y sociales establecidas por un grupo de expertos que han proporcionado las valuaciones después de unas conversaciones previas.

Este ejemplo es una simplificación de otro más amplio expuesto en las obras citadas anteriormente. Tiene únicamente una misión didáctica y se podrá extender el referencial a otros conceptos importantes.

Se considera la incidencia, en sus aspectos económicos y sociales, de 12 parámetros entre sí (tal como se haría con medidas para una matriz de incidencia de Leontiev pero en este caso con valuaciones de expertos). Los 12 sectores tomados en consideración son los siguientes:

— El clima
— La población
— La agricultura
— La sanidad
— La educación
— La ciencia y la tecnología
— La industria
— La energía
— El medio ambiente
— Los transportes
— Las comunicaciones
— La defensa

Tomaremos pues solamente 12 parámetros y proporcionaremos las 132 (12 x 12 - 12 = 132) valuaciones de los expertos. Esto es así dado que la matriz será cuadrada y reflexiva, por lo que se tendrán 132 valuaciones en lugar de 144. Existirá siempre un 1 en la diagonal principal.

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(1)}$	1 Clima	2 Población	3 Agricultura	4 Sanidad	5 Educación	6 Ciencia y Tecnología	7 Industria	8 Energía	9 Medio ambiente	10 Transportes	11 Comunicaciones	12 Defensa
1	Clima	1	.2	.9	.8	.1	.5	.1	.5	.8	.2	.3	.6
2	Población	0	1	.3	.9	.8	.6	.5	.7	.6	.8	.5	1
3	Agricultura	.1	.4	1	.8	.1	.1	.3	.2	1	.2	0	.1
4	Sanidad	0	.6	.1	1	.4	.2	.1	.1	.2	0	0	.4
5	Educación	0	1	.3	.8	1	1	.8	.3	.5	.2	.2	.4
6	Ciencia y Tecnología	.2	.3	.4	.6	.5	1	1	1	.8	1	1	1
7	Industria	.3	.2	.2	.1	0	.3	1	.2	.8	.4	.3	.8
8	Energía	.2	0	.1	0	0	.2	1	1	.9	1	0	.6
9	Medio ambiente	.2	1	.3	1	.3	.3	.5	0	1	.3	.1	0
10	Transportes	.1	.8	.2	.3	0	0	.8	.6	.2	1	.2	.4
11	Comunicaciones	0	.3	0	.1	0	.2	.3	.2	.3	.3	1	.3
12	Defensa	0	.8	.1	0	.1	1	.6	.5	0	.2	.1	1

(Figura 5.1)

La Figura 5.1 presenta las valuaciones de las incidencias proporcionadas por los expertos. Asi, el clima (1) tiene una incidencia valuada en 0.8 sobre la sanidad, es un factor importante para la sanidad (4) pero no es el único. La educación (5) tiene una incidencia valuada en 1 sobre la población (2), para el futuro próximo la educación resulta esencial para la población, etc. El grupo de expertos ha dado en este caso sus valuaciones para los efectos directos. Vamos a buscar ahora los efectos de segundo orden calculando:

(5.1) $$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(2)} = \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(1)} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(1)}$$

Se demuestra facilmente que, si una matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ es reflexiva (es decir que su diagonal se halla formada por 1) las valuaciones de $\underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ son siempre más grandes o iguales a las de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$, es decir que:

(5.2) $\quad \underset{\sim}{\mathcal{M}} \subset \underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$

Como va a comprobarse más adelante, esto es importante, ya que será posible utilizar:

(5.3) $\quad \underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}} - \underset{\sim}{\mathcal{M}}$

para eliminar los efectos de primer orden de los efectos de primer y segundo orden dados por $\underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$. Vamos pues a calcular primero:

(5.4) $\quad \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(2)} = \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(1)} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(1)}$

Resulta cómodo escribir aquí: $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(2)} = \underset{\sim}{\mathcal{M}}^{2}_{(1)}$

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{(2)}$		1 Clima	2 Población	3 Agricultura	4 Sanidad	5 Educación	6 Ciencia y Tecnología	7 Industria	8 Energía	9 Medio ambiente	10 Transportes	11 Comunicaciones	12 Defensa
1	Clima	1	.8	.9	.8	.5	.6	.6	.5	.9	.5	.5	.6
2	Población	.3	1	.4	.9	.8	1	.8	.7	.7	.8	.6	1
3	Agricultura	.3	1	1	1	.4	.4	.5	.4	1	.4	.4	.4
4	Sanidad	.2	.6	.3	1	.6	.6	.5	.6	.6	.6	.5	.6
5	Educación	.3	1	.4	.9	1	1	1	1	.8	1	1	1
6	Ciencia y Tecnología	.3	.8	.4	.8	.5	1	1	1	.9	1	1	1
7	Industria	.3	.8	.3	.8	.3	.8	1	.5	.8	.4	.3	.8
8	Energía	.3	.9	.3	.9	.3	.6	1	1	.9	1	.3	.8
9	Medio ambiente	.3	1	.3	1	.8	.6	.5	.7	1	.8	.5	1
10	Transportes	.3	.8	.3	.8	.8	.6	.8	.7	.8	1	.5	.8
11	Comunicaciones	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	1	.3
12	Defensa	.3	.8	.4	.8	.8	1	1	1	.8	1	1	1

(Figura 5.2)

Se va a calcular ahora:

(5.5) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}'_{(2)} = \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{(2)} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{(1)}$$

con objeto de que aparezcan únicamente los efectos de segunda generación

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{(2)} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{(1)}$		1 Clima	2 Población	3 Agricultura	4 Sanidad	5 Educación	6 Ciencia y Tecnología	7 Industria	8 Energía	9 Medio ambiente	10 Transportes	11 Comunicaciones	12 Defensa
1	Clima	0	.6	0	0	.4	.1	.5	0	.1	.3	.2	0
2	Población	.3	0	.1	0	0	.4	.3	0	.1	0	.1	0
3	Agricultura	.2	.6	0	.2	.3	.3	.2	.2	0	.2	.4	.3
4	Sanidad	.2	0	.2	0	.2	.4	.4	.5	.4	.6	.5	.2
5	Educación	.3	0	.1	.1	0	0	.2	.7	.3	.8	.8	.6
6	Ciencia e Tecnología	.1	.5	0	.2	0	0	0	0	.1	0	0	0
7	Industria	0	.6	.1	.7	.3	.5	0	.3	0	0	0	0
8	Energía	.1	.9	.2	.9	.3	.4	0	0	0	0	.3	.2
9	Medio ambiente	.1	0	0	0	.5	.3	0	.7	0	.5	.4	1
10	Transportes	.2	0	.1	.5	.8	.6	0	.1	.6	0	.3	.4
11	Comunicaciones	.3	0	.3	.2	.3	.1	0	.1	0	0	0	0
12	Defensa	.3	0	.3	.8	.7	0	.4	.5	.8	.8	.9	0

(Figura 5.3)

Se consideran, por orden, los efectos olvidados (de segunda generación)

$$(5.6)\quad \begin{array}{lll} (9 \longrightarrow 12) & : \text{medio ambiente} \longrightarrow \text{defensa} \\ (8 \longrightarrow 2) & : \text{energía} \longrightarrow \text{población} \\ (8 \longrightarrow 4) & : \text{energía} \longrightarrow \text{sanidad} \\ (12 \longrightarrow 11) & : \text{defensa} \longrightarrow \text{comunicaciones} \\ (5 \longrightarrow 10) & : \text{educación} \longrightarrow \text{transportes} \\ (5 \longrightarrow 11) & : \text{educación} \longrightarrow \text{comunicaciones} \\ (10 \longrightarrow 5) & : \text{transportes} \longrightarrow \text{educación} \\ (12 \longrightarrow 4) & : \text{defensa} \longrightarrow \text{sanidad} \\ (12 \longrightarrow 9) & : \text{defensa} \longrightarrow \text{medio ambiente} \\ (12 \longrightarrow 10) & : \text{defensa} \longrightarrow \text{transportes} \end{array}$$

Se buscan ahora las incidencias intermedias mediante las cuales se han podido detectar los efectos olvidados. Se recurre para ello a $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(1)}$ (figura 5.1) y se compara la fila de entrada y la columna de salida para encontrar el (o los) mínimos más grandes, actuando así:

(5.7) $(9 \rightarrow 12)$: $9 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} 12$ 1

en lugar de: $9 \xrightarrow{0} 12$ $1 - 0 = 1$

(5.8) $(8 \rightarrow 12)$: $8 \xrightarrow{.9} 9 \xrightarrow{1} 2$ .9

en lugar de: $8 \xrightarrow{0} 2$ 0

$.9 - 0 = .9$

(5.9) $(8 \rightarrow 4)$: $8 \xrightarrow{.9} 9 \xrightarrow{1} 4$ .9

en lugar de: $8 \xrightarrow{0} 4$ 0

$.9 - 0 = .9$

(5.10) $(12 \rightarrow 11)$:

$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 11 \quad 1$

en lugar de:

$12 \xrightarrow{.1} 11 \quad .1$

$1 - .1 = .9$

(5.11) $(5 \rightarrow 10)$:

$5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 10 \quad 1$

en lugar de:

$5 \xrightarrow{.2} 10 \quad .2$

$1 - .2 = .8$

(5.12) $(5 \rightarrow 11)$:

$5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 11 \quad 1$

en lugar de:

$5 \xrightarrow{.2} 11 \quad .2$

$1 - .2 = .8$

(5.13) $(10 \rightarrow 5)$:

$10 \xrightarrow{.8} 2 \xrightarrow{.8} 5 \quad .8$

en lugar de:

$10 \xrightarrow{0} 5 \quad 0$

$.8 - 0 = .8$

(5.14)

$(12 \rightarrow 4)$:

$$12 \xrightarrow{.8} 2 \xrightarrow{.9} 4 \quad .8$$

en lugar de:

$$12 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 4 \quad 0$$

$.8 - 0 = .8$

(5.15)

$(12 \rightarrow 9)$:

$$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{.8} 9 \quad .8$$

en lugar de:

$$12 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 9 \quad 0$$

$.8 - 0 = .8$

(5.16)

$(12 \rightarrow 10)$:

$$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 10 \quad 1$$

en lugar de:

$$12 \xrightarrow{\quad .2 \quad} 10 \quad .2$$

$1 - .2 = .8$

A título indicativo vamos a interpretar alguno de estos resultados. De manera directa el medio ambiente (9) no ejerce efecto alguno sobre la defensa (12) pero se produce un efecto secundario a través de la población (2): se defenderá mejor el propio país que un territorio extranjero. La defensa se consagra principalmente a la protección de la población nacional.

Directamente, la energía (8) no tiene influencia sobre la población (2) pero existe un efecto secundario importante a través del medio ambiente (9). El efecto secundario, pero muy activo, de la polución no se había tenido en cuenta.

Y así sucesivamente. Dejaremos al lector como ejercicio el análisis y explicación de los demás efectos secundarios hasta (5.16). Luego tiene la posibilidad de estudiar los efectos olvidados en los que la desviación es del 0.7 en la matriz de la figura 5.3 y realizar el mismo análisis.

En general los estudios de este tipo deberían comprender muchos más parámetros. Practicamente, tal como se concibe intuitivamente, cuantos más parámetros se consideran, es decir se acrecenta la dimensión de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(1)}$, más posibilidades existen de detectar un mayor número de efectos olvidados de los que ya se habían encontrado. Se impone de inmediato la utilización del ordenador.

En ciertos casos se pueden estudiar los efectos de tercera generación. Para ello se calcula $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(3)} - \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(2)}$ con lo que se obtienen los efectos de segunda y tercera generación a los que se retirarán los efectos de segunda generación para obtener los de tercera. En este campo se pueden imaginar muchas variantes.

6.- Otro ejemplo con una matriz rectangular.

Antes de presentar el método vamos a recordar una propiedad.Sabemos que una matriz unidad es una matriz n x m en la que la diagonal principal está formada de 1 y todas las demás casillas o posiciones se hallan formadas de 0. Se la designa por $\underset{n \times m}{U}$. Si $\underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}}$ es una matriz borrosa, se tiene:

$$(6.1) \qquad \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}} \circ \underset{n \times m}{U} = \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}}$$

y de la misma manera:

$$(6.2) \qquad \underset{m \times m}{U} \circ \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}} = \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}}$$

Sea ahora $\underset{n \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}}$ una matriz borrosa reflexiva. Si se compone $\underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}} \circ \underset{n \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}}$ se cumplirá siempre:

$$(6.3) \qquad \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}} \subset \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}} \circ \underset{n \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}}$$

ya que $\quad \underset{n \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{B}}} \supset \underset{n \times n}{U}$

De la misma manera, si $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{m \times m}$ es una matriz borrosa reflexiva y si se compone $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{m \times m} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{m \times n}$ se tendrá:

(6.4) $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{m \times n} \subset \underset{\sim}{\mathcal{A}}_{m \times m} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{m \times n}$

Asociando (6.3) y (6.4), se puede escribir:

(6.5) $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{m \times n} \subset \underset{\sim}{\mathcal{A}}_{m \times m} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{m \times n} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}}_{n \times n}$

Si se hace $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}'_{m \times n} = \underset{\sim}{\mathcal{A}}_{m \times m} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{m \times n} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}}_{n \times n}$, se tendrá que

(6.6) $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{m \times n} \subset \underset{\sim}{\mathfrak{M}}'_{m \times n}$

Si $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ es la matriz de incidencia de los elementos de A sobre los elementos de B, es decir:

(6.7) $\underset{\sim}{\mathfrak{M}} \subset A \times B$

se obtendrán los efectos de segunda generación haciendo:

(6.8) $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \subset A \times A$

y

(6.9) $\underset{\sim}{\mathfrak{B}} \subset B \times B$

en donde $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ representa la incidencia de los elementos de A sobre A y $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}$ la de los elementos de B sobre B. La matriz que dará los efectos de primera y de segunda generación será:

(6.10) $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^* = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}}$

y se obtendrán los efectos olvidados calculando:

(6.11) $\underset{\sim}{\mathfrak{D}} = \underset{\sim}{\mathfrak{M}}^* - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}$

Antes de exponer una aplicación real veamos un ejemplo numérico simple. Supongamos:

(6.12) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

y

(6.13) $B=\{b_1, b_2, b_3\}$

En un primer estadio los expertos proporcionan:

(6.14)
$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
a_1 & .7 & 1 & .2 \\ \hline
a_2 & 0 & .3 & .4 \\ \hline
a_3 & .9 & .2 & 0 \\ \hline
a_4 & .6 & .7 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

Luego se pide a los expertos que proporcionen las incidencias de los elementos de A sobre sí mismos, y de la misma manera para los elementos de B sobre sí mismos. Se construye así:

(6.15)
(6.16)

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
A \backslash A & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline
a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\ \hline
a_2 & .7 & 1 & 1 & .3 \\ \hline
a_3 & .4 & .5 & 1 & .8 \\ \hline
a_4 & .2 & .4 & .6 & 1 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\underset{\sim}{B} = \begin{array}{c|c|c|c|}
B \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
b_1 & 1 & .4 & .3 \\ \hline
b_2 & .7 & 1 & .9 \\ \hline
b_3 & 0 & .5 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

Se calcula ahora:

$$
(6.17)\qquad \underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*} =
\underset{4\,\mathrm{x}\,4}{
\begin{array}{c|cccc|}
A \backslash A & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\hline
a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\
a_2 & .7 & 1 & 1 & .3 \\
a_3 & .4 & .5 & 1 & .8 \\
a_4 & .2 & .4 & .6 & 1 \\
\hline
\end{array}}
\circ
\underset{4\,\mathrm{x}\,3}{
\begin{array}{c|ccc|}
A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .7 & 1 & .2 \\
a_2 & 0 & .3 & .4 \\
a_3 & .9 & .2 & 0 \\
a_4 & .6 & .7 & 0 \\
\hline
\end{array}}
\circ
$$

$$
\circ
\underset{3\,\mathrm{x}\,3}{
\begin{array}{c|ccc|}
B \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
b_1 & 1 & .4 & .3 \\
b_2 & .7 & 1 & .9 \\
b_3 & 0 & .5 & 1 \\
\hline
\end{array}}
=
\underset{4\,\mathrm{x}\,3}{
\begin{array}{c|ccc|}
A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .7 & 1 & .9 \\
a_2 & .9 & .7 & .7 \\
a_3 & .9 & .7 & .7 \\
a_4 & .7 & .7 & .7 \\
\hline
\end{array}}
$$

De donde se obtiene:

$$
(6.18)\qquad \underset{\sim}{\mathfrak{D}} = \underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}} =
\begin{array}{c|ccc|}
A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .7 & 1 & .9 \\
a_2 & .9 & .7 & .7 \\
a_3 & .9 & .7 & .7 \\
a_4 & .7 & .7 & .7 \\
\hline
\end{array}
-
\begin{array}{c|ccc|}
A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .7 & 1 & .2 \\
a_2 & 0 & .3 & .4 \\
a_3 & .9 & .2 & 0 \\
a_4 & .6 & .7 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c|ccc}
{}_{A}\diagdown^{B} & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & 0 & 0 & .7 \\
a_2 & .9 & .4 & .3 \\
a_3 & 0 & .5 & .7 \\
a_4 & .1 & 0 & .7
\end{array}
$$

Aparecen efectos de segunda generación para (a_1, b_3) , (a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_3).

Conviene ahora hacer diversas obervaciones importantes. Cuando sólo interesan conocer las incidencia de los elementos de B sobre sí mismos, deberá calcularse:

(6.19) $\underset{\sim}{\mathcal{M}}' = \underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}$

Si lo que interesa conocer son unicamente las incidencias de los elementos de A sobre sí mismos, se calculará:

(6.20) $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'' = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$

De hecho $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*$ expresa los efectos conjugados de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ y de $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ conjuntamente; estos efectos secundarios se van a denominar "efectos conjugados".

En el supuesto particular en que A=B, $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ debe ser no solamente una matriz cuadrada sino también reflexiva, y se tendrá:

(6.21) $\underset{\sim}{\mathcal{M}}' = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{A}} = \underset{\sim}{\mathcal{A}}^2$

(6.22) $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'' = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{A}} = \underset{\sim}{\mathcal{A}}^2$

Los efectos conjugados sólo deben tomarse una vez, ya que de lo contrario se obtendría $\mathcal{A}^3$

No hay que confundir el supuesto en que B=A con el de B≠A con card. B = card. A. En este último caso se calculará $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*$ en lugar de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'$ o bien $\underset{\sim}{\mathcal{M}}''$.

7.- Empleo de matrices Φ- borrosas

Una matriz de incidencia Φ - borrosas se halla valuada en intervalos de confianza de [0, 1] en lugar de ser valuada a través de números de [0, 1]. De esta manera, siempre con los referenciales (2.1) y (2.2) una matriz Φ - borrosa de A x B sería:

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.3 , .5]	.7	[0, .4]	1
a_2	0	[.8 , 1]	.3	[.2 , .5]
a_3	[.1 , .2]	[.8 , 1]	[.4 , .5]	1
a_4	1	[0, 1]	[.3 , .6]	.2
a_5	.7	.8	[.4 , .6]	.5

en donde, evidentemente a = [a, a]

Las operaciones min ($\wedge$) y max ($\vee$) utilizadas para los valores borrosos $a \in [0,1]$ son válidas para los intervalos de confianza $[a_1, a_2] \subset [0,1]$, por lo que:

(7.2) $\quad [m_1, m_2]\ (\wedge)\ [n_1, n_2] = [m_1 \wedge n_1\ ,\ m_2 \wedge n_2]$

(7.3) $\quad [m_1, m_2]\ (\vee)\ [n_1, n_2] = [m_1 \vee n_1\ ,\ m_2 \vee n_2]$

Más adelante estudiaremos otros operadores.

La ventaja de la relación Φ- borrosa sobre la relación borrosa viene dada porque deja un margen de subjetividad al experto (o a los expertos). Puede utilizarse el sistema endecadario descrito en (4.3) o en (4.4). Así, cuando se emplea el (4.3):

(7.4) $\quad$ [.2 , .4] = [casi sin incidencia, débil incidencia]

Así, pues, con las valuaciones en intervalos de confianza, se escribirá, en lugar de (4.1)

(7.5) $\quad \forall\ x_i, x_j \in \underset{\sim}{\mathfrak{M}} \quad : \quad v(x_i,x_j) \subset [0,1]$

Existe la costumbre, para lo Φ - borroso, de utilizar un tilde especial $\approx$ en lugar del tilde ordinario $\sim$ empleado para lo borroso.

Todo cuanto se hace con lo borroso se puede hacer con lo Φ - borroso. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que en lo borroso todas las valuaciones son comparables entre sí y forman un orden total, se tiene que:

(7.6) $\quad m>n \quad$ o bien $\quad m = n \quad$ o bien $\quad m<n$

En el supuesto de intervalos de confianza se tiene un orden parcial, todos los intervalos no son comparables entre sí. Es necesario escribir:

(7.7)
$$([m_1, m_2] \preccurlyeq [n_1,n_2])$$
$$\Longrightarrow ((m_1 < n_1 , m_2 < n_2) \quad \text{o bien} \quad (m_1 < n_1 , m_2 = n_2) \quad \text{o bien} \quad (m_1 = n_1 , m_2 < n_2))$$

De esta manera:

(7.8) $\quad [.3, .7]$ no es comparable con $[.2 , .8]$

Cuando dos intervalos de confianza no son comparables se puede introducir un segundo criterio, a elegir: la media de los extremos, el extremo inferior, el extremo superior; la elección dependerá del problema planteado.

Una matriz de incidencia Φ - borrosa es una relación Φ - borrosa valuada según las incidencias estimadas subjetivamente.

Si esta matriz es tal que:

(7.9) $\quad \underset{\approx}{\mathfrak{M}} \subset E \times E$

es decir relativa al mismo referencial E, se tiene siempre:

(7.10) $\quad \forall x_i \in E \qquad v(x_i, x_i) = 1$

La fórmula de composición maxmin (4.9) se convierte en:

(7.11) $\quad v(a_i,c_k) = \underset{j}{(\vee)} (v(a_i,b_j), (\wedge)\, v (b_j,c_k))$

en donde los ( ) alrededor de $\wedge$ y $\vee$ indican que conviene aplicar (7.2) y (7.3).

La composición maxmin definida por (7.11) posee una propiedad muy interesante y necesaria para los intervalos de confianza: los operadores $\wedge$ y $\vee$ son monótonos es decir que, volviendo a considerar (7.2) y (7.3):

(7.12) $$[m_1, m_2]\,(\wedge)\,[n_1, n_2] \leq [m_1, m_2]$$
$$\leq [n_1, n_2]$$

(7.13) $$[m_1, m_2]\,(\vee)\,[n_1, n_2] \geq [m_1, m_2]$$
$$\geq [n_1, n_2]$$

Además, para toda matriz de incidencia Φ - borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ cuya diagonal principal se halla formada de 1 se tiene:

(7.14) $$\underset{\sim}{\mathcal{M}} \underset{\Phi}{\subset} \underset{\sim}{\mathcal{M}}^2 \text{ en donde } \underset{\sim}{\mathcal{M}}^2 = \underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$$

lo que significa que los intervalos de confianza de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^2$ son más cercanos a 1 o iguales que sus correspondientes de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$; se trata de la inclusión por monotonía de los intervalos representada por $\underset{\Phi}{\subset}$. Lo mismo sucederá para las matrices rectangulares definidas en el apartado 6:

(7.15) $$\underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}} \underset{\Phi}{\subset} \underset{m \times n}{\underset{\sim}{\mathcal{M}}}'$$

Como esto puede resultar algo abstracto, vamos a desarrollar algunos ejemplos.

Partamos de:

(7.16) $$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

y la matriz de incidencia: $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	[.3 , .5]	.7	[.2 , .3]
a_2	0	1	[.4 , .7]	.5
a_3	[.8 , 1]	[.7 , 1]	1	[.4 , .7]
a_4	.2	[0, .2]	[.1, .4]	1

Se va a calcular $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^2$ con la ayuda de (7.11) en donde sólo existen las a_i. Para la fila a_1 y la columna a_1 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&([1, 1]\,(\wedge)\,[1, 1])\,(\vee)\,([.3, .5]\,(\wedge)\,[0, 0])\,(\vee)\\
&([.7, .7]\,(\wedge)\,[.8, 1])\,(\vee)\,([.2, .3]\,(\wedge)\,[.2, .2])\\
&= [1, 1]\,(\vee)\,[0, 0]\,(\vee)\,[.7, .7]\,(\vee)\,[.2, .2]\\
&= [1, 1]
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Para la fila a_1 y la columna a_2:

$$
\begin{aligned}
&([1, 1]\,(\wedge)\,[.3, .5])\,(\vee)\,([.3, .5]\,(\wedge)\,[1, 1])\,(\vee)\\
&([.7, .7]\,(\wedge)\,[.7, 1])\,(\vee)\,([.2, .3]\,(\wedge)\,[0, .2])\\
&= [.3, .5]\,(\vee)\,[.3, .5]\,(\vee)\,[.7, .7]\,(\vee)\,[0, .2]\\
&= [.7, .7]
\end{aligned}
\tag{7.19}
$$

Para la fila a_1 y la columna a_3:

$$
\begin{aligned}
&([1, 1]\,(\wedge)\,[.7, .7])\,(\vee)\,([.3, .5]\,(\wedge)\,[.4, .7])\,(\vee)\\
&([.7, .7]\,(\wedge)\,[1, 1])\,(\vee)\,([.2, .3]\,(\wedge)\,[.1, .4])\\
&= [.7, .7]\,(\vee)\,[.3, .5]\,(\vee)\,[.7, .7]\,(\vee)\,[.1, .3]\\
&= [.7, .7] = .7
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

y así sucesivamente se obtiene:

(7.21)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	.7	.7	[.4 , .7]
a_2	[.4, .7]	1	[.4 , .7]	[.5, .7]
a_3	[.8 , 1]	[.7 , 1]	1	[.5 , .7]
a_4	[.2, .4]	[.2, .4]	[.2, .4]	1

Se tiene:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}} \underset{\Phi}{\subsetneq} \underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2 \tag{7.22}$$

Se puede calcular ahora la distancia existente entre cada elemento de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ y cada elemento correspondiente de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^2$. Esta distancia será la media de las desviaciones extremo inferior y extremo superior. Así, para (a_1, a_2):

(7.23)
$$d = \frac{(.7 - .3) + (.7 - .5)}{2} = .3$$

Se obtiene así como matriz de distancias:

(7.24)

$d_{\underset{\sim}{\mathcal{M}},\underset{\sim}{\mathcal{M}}^2} =$

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	.3	0	.3
a_2	.55	0	0	.1
a_3	0	0	0	.05
a_4	.1	.2	.05	0

Existe un efecto no despreciable de a_2 sobre a_1.

Veamos ahora el supuesto de una matriz rectangular.

Se toma de nuevo el ejemplo del epígrafe 6 realizando esta vez valuaciones mediante intervalos.

$\underset{\sim}{\mathcal{M}} =$

	b_1	b_2	b_3
a_1	[.2, .5]	0	[.8, 1]
a_2	[.4, .5]	.7	1
a_3	0	[.3, .9]	[0, .2]
a_4	.5	[.4, .6]	.8

(7.25)

en donde:

(7.26) $$\underset{\sim}{\mathcal{A}} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & [0, .3] & [.8, 1] & 1 \\ \hline a_2 & [.4, .5] & 1 & .7 & .7 \\ \hline a_3 & [.2, .5] & 1 & 1 & [.8, 1] \\ \hline a_4 & [.3, .4] & .5 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(7.27) $$\underset{\sim}{\mathfrak{B}} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & [.2, .3] & .8 \\ \hline b_2 & 0 & 1 & [.4, .7] \\ \hline b_3 & [.3, .8] & .6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Se calcula

(7.28) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^* = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}} \qquad \circ = \text{maxmin}$$

Se obtiene:

(7.29) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^* = \begin{array}{c|c|c|c|} A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & [.5, .8] & [.6, .9] & [.8, 1] \\ \hline a_2 & [.5, .8] & .7 & 1 \\ \hline a_3 & [.5, .8] & [.7, .9] & 1 \\ \hline a_4 & [.5, .8] & [.6, .9] & [.8, 1] \\ \hline \end{array}$$

Si se compara (7.25) y (7.29) se halla la matriz de distancias

(7.30) $d_{\underset{\sim}{M},\underset{\sim}{M}^*} =$

A \ B	b_1	b_2	b_3
a_1	.3	.75	0
a_2	.2	0	0
a_3	.65	.2	.9
a_4	.15	.25	.1

Existen varios efectos olvidados interesantes como (a_3, b_3) en donde d= 0.90, (a_1, b_2) en donde d= 0.75, (a_3, b_1) en donde d= 0.65. Las demás distancias no nulas pueden ser despreciadas a estos efectos.

8.- Utilización de tripletas de confianza

Una tripleta de confianza se presenta bajo la forma:

(8.1) $$(m_1, m_2, m_3)\,, \qquad m_1, m_2, m_3 \in [0, 1]$$
$$m_1 \leq m_2 \leq m_3$$

m_1 es el extremo inferior
m_2 es el máximo de presunción
m_3 es el extremo superior

Constituye una posibilidad de mayor libertad para el experto (o los expertos) que de esta manera pueden expresar su presunción óptima. Se tiene:

(8.2) $$(m_1, m_2, m_3)\,(\wedge)\,(n_1, n_2, n_3)$$
$$= (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3)$$

(8.3) $$(m_1, m_2, m_3)\,(\vee)\,(n_1, n_2, n_3)$$
$$= (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3)$$

Seguidamente exponemos un ejemplo de matriz de incidencias valuada con tripletas de confianza.

(8.4) B / A	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(.3, .5, .6)	(.1, .2, .3)	(.8, .9 ,1)	0
a_2	(.2, .2, .7)	(.7, .8, 1)	0	1
a_3	.3	1	(.5, .5, .7)	.6
a_4	1	(0, .1, .1)	(.4, .5, .8)	(.9, .9, 1)
a_5	(0, .2, .5)	0	(0, 0, .2)	(.4, .6, .7)

habida cuenta que:

(8.5) $(m, m, m) = m$

Con las tripletas de confianza se opera de la misma manera que con los intervalos de confianza teniendo en cuenta (8.2) y (8.3).

La distancia entre dos tripletas de confianza:

(8.6) (m_1, m_2, m_3) y (n_1, n_2, n_3)

viene dada por:

(8.7) $$d(m,n) = \frac{(m_1 - n_1) + 2(m_2 - n_2) + (m_3 - n_3)}{4}$$

en donde se supone aquí que $m_1 \geq n_1$, $m_2 \geq n_2$, $m_3 \geq n_3$ y en caso contrario se toman los valores absolutos de las diferencias en lugar de las propias diferencias.

En la fórmula (8.7) se asigna un peso de 2 al máximo de presunción (1).

Como ejercicio práctico se podría tomar el ejemplo desde (7.25) hasta (7.30) colocando un máximo de presunción en los intervalos de confianza.

De la misma manera que los intervalos de confianza a fortiori se podría decir que las tripletas de confianza no forman un orden total sino un orden parcial. Cuando no se las puede comparar por dominio se toma un segundo criterio, por ejemplo su distancia al origen de abscisas, o el máximo de presunción, entre otros.

(1) Esta ponderación queda justificada cuando se hace referencia a la teoría de los números borrosos triangulares. La fórmula (8.7) proporciona, con valores absolutos, la distancia entre dos números borrosos triangulares.

9.- Utilización de matrices aleatorias borrosas

Con objeto de poner de manifiesto cúal es el camino a seguir para obtener una matriz aleatoria borrosa, en el caso más general de que las relaciones de incidencia den lugar a una matriz rectangular, se pide a 10 expertos que cada uno de ellos proporcione una matriz de incidencias valuada con números que pertenezcan al conjunto endecadario $\{0, .1, .2, .3, \ldots .9, 1\}$. Se propone a estos expertos que valuen las incidencia de los elementos de:

(9.1) $\quad A = \{a_1, a_2, a_3\}$

sobre los elementos de:

(9.2) $\quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

Cada experto da su matriz de incidencia.

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(1)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
A \diagdown B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline
a_1 & .3 & .5 & .9 & 0 \\ \hline
a_2 & .6 & .3 & 1 & .2 \\ \hline
a_3 & 1 & 0 & .5 & 0 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(2)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
A \diagdown B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline
a_1 & .5 & .7 & 1 & .1 \\ \hline
a_2 & .5 & .4 & 1 & 0 \\ \hline
a_3 & 1 & 0 & .5 & .3 \\ \hline
\end{array}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(3)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
A \diagdown B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline
a_1 & .2 & .3 & .8 & .2 \\ \hline
a_2 & .1 & .5 & 1 & .2 \\ \hline
a_3 & .9 & 0 & .7 & .3 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(4)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
A \diagdown B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline
a_1 & .2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
a_2 & 0 & .3 & 1 & .2 \\ \hline
a_3 & .7 & .2 & .8 & .2 \\ \hline
\end{array}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(5)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 1 & .8 & 1 & .1 \\ \hline a_2 & .4 & .1 & 1 & .1 \\ \hline a_3 & 1 & .3 & .9 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(6)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .5 & .8 & .9 & 0 \\ \hline a_2 & .8 & .2 & 1 & 0 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(7)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .6 & .4 & 1 & 0 \\ \hline a_2 & .5 & .3 & 1 & .1 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .2 & .2 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(8)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .8 & .2 & 1 & .2 \\ \hline a_2 & .6 & .4 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .4 & .1 \\ \hline \end{array}$$

(9.3)

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(9)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .9 & .5 & .8 & .3 \\ \hline a_2 & .2 & .7 & 1 & 0 \\ \hline a_3 & .4 & .5 & .9 & .2 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(10)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} A \backslash B & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 0 & .5 & .7 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & .8 & 1 & .3 \\ \hline a_3 & .8 & .8 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

A partir de estas informaciones se establece una estadística con estas matrices de incidencia, que presentamos en (9.4). A partir de esta estadística se extrae una ley de probabilidad de la que se obtiene la ley acumulada complementaria, presentada en (9.5). Se obtiene así una matriz aleatoria borrosa que representa las relaciones borrosas dadas por los expertos. Todas las operaciones que pueden realizarse con las relaciones borrosas también pueden hacerse, de la misma manera, con las relaciones aleatorias borrosas nivel α por nivel α, $\alpha = \{0, .1, .2..., .9, 1\}$. Hemos elegido 10 expertos y niveles en sistema endecadario con objeto de conseguir la mayor sencillez y considerar los números con un sólo decimal, pero puede tomarse el número de expertos que se desee y el número de niveles que se crea oportuno.

(9.4)

		b_1	b_2	b_3	b_4
	0	1	1		5
	.1				2
	.2	2	1		2
	.3	1	1		1
	.4		1		
a_1	.5	2	3		
	.6	1			
	.7		1	1	
	.8	1	2	2	
	.9	1		2	
	1	1		5	
	0	2			3
	.1	1	1		2
	.2	1	1		4
	.3		3		1
	.4	1	2		
a_2	.5	2	1		
	.6	2			
	.7		1		
	.8	1	1		
	.9				
	1			10	
	0		6		4
	.1				1
	.2		1	1	3
	.3		1	1	2
	.4	1		1	
a_3	.5		1	2	
	.6				
	.7	1		1	
	.8	1	1	1	
	.9	1		2	
	1	6		1	

(9.5)

		b_1	b_2	b_3	b_4
	0	1	1	1	1
	.1	.9	.9	1	.5
	.2	.9	.9	1	.3
	.3	.7	.8	1	.1
	.4	.6	.7	1	0
a_1	.5	.6	.6	1	0
	.6	.4	.3	1	0
	.7	.3	.3	1	0
	.8	.3	.2	.9	0
	.9	.2	0	.7	0
	1	.1	0	.5	0
	0	1	1	1	1
	.1	.8	1	1	.7
	.2	.7	.9	1	.5
	.3	.6	.8	1	.1
	.4	.6	.5	1	0
a_2	.5	.5	.3	1	0
	.6	.3	.2	1	0
	.7	.1	.2	1	0
	.8	.1	.1	1	0
	.9	0	0	1	0
	1	0	0	1	0
	0	1	1	1	1
	.1	1	.4	1	.6
	.2	1	.4	1	.5
	.3	1	.3	.9	.2
	.4	1	.2	.8	0
a_3	.5	.9	.2	.7	0
	.6	.9	.1	.5	0
	.7	.9	.1	.5	0
	.8	.8	.1	.4	0
	.9	.7	0	.3	0
	1	.6	0	.1	0

La composición maxmin utilizada en los epígrafes anteriores se empleará también aquí de la misma manera pero esta vez nivel a nivel, por ejemplo empezando por el nivel $\alpha = 1$ para terminar con el nivel $\alpha = 0$. Se aconseja conservar el sistema endecadario ya que sus 11 posiciones resultan suficientes para el estudio de los efectos olvidados.

En aras a una mayor simplicidad, vamos a abandonar el caso de matrices rectangulares para considerar ahora un ejemplo con matrices cuadradas. Posteriormente (epígrafe 11) obtendremos los efectos olvidados partiendo de una matriz aleatoria borrosa rectangular.

Se parte de una $\underset{\sim}{\mathfrak{R}}$ que se supone ha sido obtenida a partir de un cierto número de expertos (una vez más 10 para obtener un sólo decimal) y se quiere calcular $\underset{\sim}{\mathfrak{R}}^2$ (el punto colocado debajo de la $\underset{\sim}{\mathfrak{R}}$ indica que se trata de una relación aleatoria borrosa)

Supongamos pues una $\underset{\sim}{\mathfrak{R}} \subset A \times A$ en donde

(9.6) $\qquad A = \{a_1, a_2, a_3\}$

(9.7) $\underset{\sim}{R} =$

A \ A		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	0	1
	.2	1	0	1
	.3	1	0	1
	.4	1	0	.8
	.5	1	0	.7
	.6	1	0	0
	.7	1	0	0
	.8	1	0	0
	.9	1	0	0
	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	.9
	.2	1	1	.9
	.3	1	1	.9
	.4	.6	1	.9
	.5	.5	1	.9
	.6	.4	1	.5
	.7	.1	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	0
	1	0	1	0
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	.5	.5	1
	.5	.2	.2	1
	.6	0	0	1
	.7	0	0	1
	.8	0	0	1
	.9	0	0	1
	1	0	0	1

Vamos a calcular $\underset{\sim}{R}^2$ nivel por nivel:

Nivel 1 :
$$\begin{array}{c|ccc|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Nivel 0.9 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nivel 0.8 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nivel 0.7 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .1 & 1 & .4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .1 & 1 & .4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .1 & 1 & .4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nivel 0.6 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .4 & 1 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .4 & 1 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .4 & 1 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(9.8)

Nivel 0.5 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & .7 \\ .5 & 1 & .9 \\ .2 & .2 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & .7 \\ .5 & 1 & .9 \\ .2 & .2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .2 & .7 \\ .5 & 1 & .9 \\ .2 & .2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nivel 0.4 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & .8 \\ .6 & 1 & .9 \\ .5 & .5 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & .8 \\ .6 & 1 & .9 \\ .5 & .5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .5 & .8 \\ .6 & 1 & .9 \\ .5 & .5 & 1 \end{bmatrix}$$

Nivel 0.3 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & .8 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & .8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & .8 & 1 \end{bmatrix}$$

Nivel 0.2 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nivel 0.1 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el nivel 0, existirá 1 en todas las casillas.
Presentemos ahora la correspondiente relación aleatoria borrosa en (9.9)

(9.9) $\underset{\sim}{R}^2 =$

A \ A		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	1	.5	.8
	.5	1	.2	.7
	.6	1	0	0
	.7	1	0	0
	.8	1	0	0
	.9	1	0	0
	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	.6	1	.9
	.5	.5	1	.9
	.6	.4	1	.5
	.7	.1	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	0
	1	0	1	0
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	.5	.5	1
	.5	.2	.2	1
	.6	0	0	1
	.7	0	0	1
	.8	0	0	1
	.9	0	0	1
	1	0	0	1

Procedamos a calcular la esperanza matemática de $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}^2$ para comparar estas esperanzas matemáticas. Para ello se van a desacumular $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}^2$ y calcular las esperanzas matemáticas de cada par (a_i, a_j) haciendo la suma de los productos de los niveles por sus correspondientes probabilidades.

(9.10) desacumulación de $\underset{\approx}{\mathfrak{R}}^2$.

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	0	1	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	.0	.2
	.4	0	0	.1
	.5	0	0	.7
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	0	0
a_2	0	0	0	.1
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	.4	0	0
	.4	.1	0	0
	.5	.1	0	.4
	.6	.3	0	.1
	.7	.1	0	.1
	.8	0	0	.3
	.9	0	0	0
	1	0	1	0
a_3	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	.5	.3	0
	.4	.3	.3	0
	.5	.2	.2	0
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	0	1

(9.11) desacumulación de $\underset{\approx}{\mathfrak{R}}^2$.

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	0	.3	.2
	.4	0	.3	.1
	.5	0	.2	.7
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	0	0
a_2	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	.4	0	.1
	.4	.1	0	0
	.5	.1	0	.4
	.6	.3	0	.1
	.7	.1	0	.1
	.8	0	0	.3
	.9	0	0	0
	1	0	1	0
a_3	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	.5	.3	0
	.4	.3	.3	0
	.5	.2	.2	0
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	0	1

A título de ejemplo calculemos la esperanza matemática de (a_1, a_3) en $\underset{\approx}{\mathfrak{R}}$

(9.12) $$\varepsilon\left((a_1, a_3) (\underset{\approx}{\mathfrak{R}}) \right) = (.3)\,(.2) + (.4)\,(.1) + (.5)\,(.7) = 0.45$$

Calculando las 2 veces 9 esperanzas matemáticas se obtiene:

(9.13)

$$\mathcal{E}(\underset{\sim}{R}) = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & .45 \\ a_2 & .46 & 1 & .57 \\ a_3 & .37 & .35 & 1 \end{array}$$

(9.14)

$$\mathcal{E}(\underset{\sim}{R}^2) = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .35 & .45 \\ a_2 & .46 & 1 & .60 \\ a_3 & .37 & .35 & 1 \end{array}$$

Resulta evidente la existencia de un efecto de segunda generación para (a_1, a_2) aunque poco intenso pero que conviene ser estudiado por parte de los expertos.

Cuando se utiliza el método expuesto en este epígrafe cabe esperar que no surjan de manera drástica los efectos de segunda generación, con desviaciones cercanas a 1; esto puede ser motivado, evidentemente, por la distinta opinión que expresan los expertos.

Hemos elegido aquí un mini ejemplo para los cálculos sean breves y puedan realizarse a mano. Los supuestos reales pueden alcanzar varias decenas de elementos.

Nuestro ejemplo hacía referencia a la recuperación de los efectos de segunda generación con una matriz cuadrada en donde $\underset{\sim}{R} \subset A \times A$. El método es generalizable sin problemas especiales al supuesto de matrices rectangulares utilizando el procedimiento presentado en el epígrafe 6.

10.- Utilización de los expertones

Continuemos con las descripción realizada en el epígrafe anterior y supongamos ahora que cada experto, en lugar de expresar su opinión mediante un número de [0,1] lo hace a través de un intervalo de confianza de [0,1], esto les permite una mayor libertad en sus opiniones subjetivas. Así consideremos de nuevo (9.1) y (9.2) y supongamos también que se solicita la opinión de diez expertos, los cuales proporcionan:

$\mathcal{M}^{(1)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.3, .7]	[.4, .5]	[.6, .7]	.3
a_2	[.2, .3]	[.8, 1]	.8	0
a_3	1	[0, .3]	[0, .5]	[.6, .8]

$\mathcal{M}^{(2)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.3, .6]	0	.3	[.1, .2]
a_2	[.2, .5]	[.1, .2]	.9	0
a_3	[.3, .4]	0	[0, .5]	[.9 , 1]

$\mathcal{M}^{(3)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.4, 1]	1	[0, .2]	.2
a_2	[.5, .6]	[.9, 1]	1	[.2, .4]
a_3	1	[.4, .5]	[0, .2]	[.7, .8]

$\mathcal{M}^{(4)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.5, .7]	.3	[.1, .3]	[0, .2]
a_2	1	[.1, .2]	[.8, 1]	0
a_3	[.1, .4]	0	.3	1

(10.1)

$\mathcal{M}^{(5)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[0,.1]	[.5, .6]	0	[.1, .2]
a_2	[.4, 1]	1	[.7, .9]	0
a_3	1	0	[0, .2]	1

$\mathfrak{M}^{(6)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	.5	0	0	[.2, .3]
a_2	1	1	1	[0, .2]
a_3	0	[.1, .2]	0	[.6, 1]

$\mathfrak{M}^{(7)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.2, .3]	.6	.4	[.2, .4]
a_2	[.6, 1]	[.8, 1]	[.8, 1]	[.1, .3]
a_3	[.7, .9]	0	[.1, .3]	[.9, 1]

$\mathfrak{M}^{(8)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.4, .5]	0	[0,.3]	.5
a_2	[.7, 1]	[.9, 1]	.8	0
a_3	0	0	[.1, .3]	[.5, .8]

$\mathfrak{M}^{(9)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.2, .3]	[.3, .5]	[0, .1]	0
a_2	[.3, 1]	[.8, 1]	[.8, .9]	.1
a_3	1	.1	[.2, .3]	[.7, .8]

$\mathcal{M}^{(10)} =$		b_1	b_2	b_3	b_4
	a_1	.8	[0, .2]	[.1, .2]	[.6, .7]
	a_2	1	1	[.8, .9]	0
	a_3	[.2,.3]	0	.5	1

Se construye la estadística de los extremos inferiores y la de los extremos superiores

(10.2)

		b_1		b_2		b_3		b_4	
a_1	0	1		4	3	5	2	2	1
	.1		1			2	1	2	
	.2	2			1		2	3	4
	.3	2	2	2	1	1	3	1	2
	.4	2		1		1	1		1
	.5	2	2	1	2			1	1
	.6		1	1	2	1		1	
	.7		2				1		1
	.8	1	1						
	.9								
	1		1	1	1				
a_2	0							7	6
	.1			2				2	1
	.2	2			2			1	1
	.3	1	1						1
	.4	1							1
	.5	1	1						
	.6	1	1						
	.7	1				1			
	.8			3		6	2		
	.9			2		1	4		
	1	3	7	3	8	2	4		
a_3	0	2	2	7	6	5	1		
	.1	1		2	1	2			
	.2	1			1	1	2		
	.3	1	1		1	1	4		
	.4		2	1					
	.5				1	1	3	1	
	.6							2	
	.7	1						2	
	.8								4
	.9		1					2	
	1	4	4					3	6

A partir de este cuadro se obtienen las probabilidades acumuladas complementarias, para las probabilidades inferiores y para las probabilidades superiores:

(10.3) $\underset{\sim}{R} =$

		b_1		b_2		b_3		b_4	
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.9	1	.6	.7	.5	.8	.8	.9
	.2	.9	.9	.6	.7	.3	.7	.6	.9
	.3	.7	.9	.6	.6	.3	.5	.3	.5
	.4	.5	.7	.4	.5	.2	.2	.2	.3
a_1	.5	.3	.7	.3	.5	.1	.1	.2	.2
	.6	.1	.5	.2	.3	.1	.1	.1	.1
	.7	.1	.4	.1	.1	0	.1	0	.1
	.8	.1	.2	.1	.1	0	0	0	0
	.9	0	.1	.1	.1	0	0	0	0
	1	0	.1	.1	.1	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	.3	.4
	.2	1	1	.8	1	1	1	.1	.3
	.3	.8	1	.8	.8	1	1	0	.2
	.4	.7	.9	.8	.8	1	1	0	.1
a_2	.5	.6	. 9	.8	.8	1	1	0	0
	.6	.5	.8	.8	.8	1	1	0	0
	.7	.4	.7	.8	.8	1	1	0	0
	.8	.3	.7	.8	.8	.9	1	0	0
	.9	.3	.7	.5	.8	.3	.8	0	0
	1	.3	.7	.3	.8	.2	.4	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.8	.8	.3	.4	.5	.9	1	1
	.2	.7	.8	.1	.3	.3	.9	1	1
	.3	.6	.8	.1	.2	.2	.7	1	1
	.4	.5	.7	.1	.1	.1	.3	1	1
a_3	.5	.5	.5	0	.1	.1	.3	1	1
	.6	.5	.5	0	0	0	0	.9	1
	.7	.5	.5	0	0	0	0	.7	1
	.8	.4	.5	0	0	0	0	.5	1
	.9	.4	.5	0	0	0	0	.5	.6
	1	.4	.4	0	0	0	0	.3	.6

Lo que hemos presentado en (10.3) es una matriz de incidencia por expertones que generaliza con los intervalos de confianza las matrices aleatorias borrosas presentadas en el epígrafe anterior. Todo cuanto se realiza con las matrices normales de incidencia, con las matrices de incidencia borrosas, Φ - borrosas, aleatorias borrosas, puede también hacerse con las matrices de incidencia por expertones. Los modelos y las propiedades son las mismas, únicamente se alargan los cálculos (22 veces más con los expertones que con lo borroso) pero esto no constituye problema alguno con los ordenadores existentes en la actualidad.

Evidentemente todo cuanto se hace con 10 expertos puede realizarse con n expertos $n \neq 10$, pero en este caso se tendrán cifras con más de un decimal, lo que tampoco tiene demasiada importancia contando con la informática.

Volvamos a tomar el mini ejemplo descrito desde (9.7) a (9.14) utilizando en esta ocasión los expertones. Se supone que gracias a la colaboración de 10 expertos se ha obtenido la siguiente matriz de incidencia por expertones:

(10.4) $\underset{\sim}{R} =$

A \ A	α	a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.2
	.3	1	1	0
	.4	1	1	0
	.5	1	1	0
	.6	1	.9	0
	.7	1	.6 .8	0
	.8	1	.6 .8	0
	.9	1	.3	0
	1	1	.1	0
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	.9 1	1	.9
	.4	.9 1	1	.7 .8
	.5	.7 .8	1	.7 .8
	.6	.6 .7	1	.7
	.7	.6 .7	1	.6 .7
	.8	.6	1	.6
	.9	.6	1	.6
	1	.6	1	.3 .4
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	.6 .7	1
	.3	1	.3 .4	1
	.4	.9 1	.3	1
	.5	.9 1	0	1
	.6	.9	0	1
	.7	.9	0	1
	.8	.8	0	1
	.9	.7 .8	0	1
	1	.5 .6	0	1

Vamos a calcular $\underset{\sim}{R}^2$ nivel a nivel α:

$$\alpha=1\quad \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .1 & 0 \\ \hline a_2 & .6 & 1 & .3\ \ .4 \\ \hline a_3 & .5\ \ .6 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .1 & 0 \\ \hline a_2 & .6 & 1 & .3\ \ .4 \\ \hline a_3 & .5\ \ .6 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .1 & .1 \\ \hline a_2 & .6 & 1 & .3\ \ .4 \\ \hline a_3 & .5\ \ .6 & .1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.9\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .3 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ \ .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .3 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ \ .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .3 & .3 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ \ .8 & .3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.8\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .6\ \ .8 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .6\ \ .8 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .6\ \ .8 & .6 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & .6\ \ .8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.7\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .6\ \ .8 & 0 \\ \hline .6\ \ .7 & 1 & .6\ \ .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .6\ \ .8 & 0 \\ \hline .6\ \ .7 & 1 & .6\ \ .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .6\ \ .8 & .6\ \ .7 \\ \hline .6\ \ .7 & 1 & .6\ \ .7 \\ \hline .9 & .6\ \ .8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.6\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .9 & 0 \\ \hline .6\ \ .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .9 & 0 \\ \hline .6\ \ .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .9 & .7 \\ \hline .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & .9 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.5\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .7\ \ .8 & 1 & .7\ \ .8 \\ \hline .9\ \ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .7\ \ .8 & 1 & .7\ \ .8 \\ \hline .9\ \ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .7\ \ .8 \\ \hline .7\ \ .8 & 1 & .7\ \ .8 \\ \hline .9\ \ 1 & .9\ \ 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.4\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ \ 1 & 1 & .7\ \ .8 \\ \hline .9\ \ 1 & .3 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ \ 1 & 1 & .7\ \ .8 \\ \hline .9\ \ 1 & .3 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .7\ \ .8 \\ \hline .9\ \ 1 & 1 & .7\ \ .8 \\ \hline .9\ \ 1 & .9\ \ 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.3\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ \ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .3\ \ .4 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ \ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .3\ \ .4 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline .9\ \ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.2\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .2 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .6\ \ .7 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .2 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .6\ \ .7 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=.1\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .9\ \ 1 \\ \hline 1 & 1 & .9\ \ 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .9\ \ 1 \\ \hline 1 & 1 & .9\ \ 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .9\ \ 1 \\ \hline 1 & 1 & .9\ \ 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Para el nivel 0, también habrá un 1 en todas las casillas.

Vamos a reconstruir el expertón $\underset{\approx}{R}^2$:

(10.6) $\underset{\approx}{R} =$

A \ A		a_1	a_2	a_3
	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	1	1	.9
	.4	1	1	.7 .8
a_1	.5	1	1	.7 .8
	.6	1	.9	.7
	.7	1	.6 .8	.6 .7
	.8	1	.6 .8	.6
	.9	1	.3	.3
	1	1	.1	.1
	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	.9 1	1	.9
	.4	.9 1	1	.7 .8
a_2	.5	.7 .8	1	.7 .8
	.6	.7	1	.7
	.7	.6 .7	1	.6 .7
	.8	.6	1	.6
	.9	.6	1	.6
	1	.6	1	.3 .4
	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	.9 1	.9 1	1
a_3	.5	.9 1	.9 1	1
	.6	.9	.9	1
	.7	.9	.6 .8	1
	.8	.8	.6 .8	1
	.9	.7 .8	.3	1
	1	.5 .6	.1	1

Se va a proceder ahora a desacumular $\underset{\approx}{R}$ representada en (10.4) y $\underset{\approx}{R}^2$ para calcular las esperanzas matemáticas para las probabilidades inferiores y para las probabilidades superiores.

(10.7) desacumulación de $\underset{\sim}{\mathfrak{R}}$

		a_1	a_2	a_3
	0			.1 0
	.1			.7 .8
	.2			.2
	.3			
	.4			
a_1	.5		.1	
	.6		.3 .1	
	.7			
	.8		.3 .5	
	.9		.2	
	1	1	.1	
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2	.1 0		
	.3			.2 .1
	.4	.2 .2		
a_2	.5	.1 .1		0 .1
	.6			.1 0
	.7	0 .1		0 .1
	.8			
	.9			.3 .2
	1	.6	1	.3 .4
	0			
	.1		.4 .3	
	.2		.3 .3	
	.3	.1 0	0 .1	
	.4		.3	
a_3	.5	0 .1		
	.6			
	.7	.1 .1		
	.8	.1 0		
	.9	.2 .2		
	1	.5 .6		1

(10.8) desacumulación de $\underset{\sim}{\mathfrak{R}}^2$

		a_1	a_2	a_3
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2			
	.3			.2 .1
	.4			
a_1	.5		.1 .1	0 .1
	.6		.3 .1	.1 0
	.7			0 .1
	.8		.3 .5	.3
	.9		.2	.2
	1	1	.1	.1
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2	.1 0		
	.3			.2 .1
	.4	.2 .2		
a_2	.5	0 .1		0 .1
	.6	.1 0		.1 0
	.7	0 .1		0 .1
	.8			
	.9			.3 .2
	1	.6	1	.3 .4
	0			
	.1			
	.2			
	.3	.1 0	.1 0	
	.4			
a_3	.5	0 .1	0 .1	
	.6		.3 .1	
	.7	.1 .1		
	.8	.1 0	.3 .5	
	.9	.2 .2	.2	
	1	.5 .6	.1	1

Se obtienen las esperanzas matemáticas:

(10.9) $\quad \varepsilon\,(\underset{\sim}{R}) =$

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	.75, .79	.11, .11
a_2	.75, .80	1	.69, .74
a_3	.86, .90	.22, .24	1

(10.10) $\quad \varepsilon\,(\underset{\sim}{R}^2) =$

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	.75, .79	.64, .68
a_2	.76, .80	1	.69, .74
a_3	.86, .90	.73, .79	1

Se toman las medias de los intervalos de confianza:

(10.11) $\quad \bar{\varepsilon}\,(\underset{\sim}{R}) =$

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	.770	.115
a_2	.775	1	.715
a_3	.880	.230	1

(10.12) $\quad \bar{\varepsilon}\,(\underset{\sim}{R}^2) =$

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	.770	.660
a_2	.780	1	.715
a_3	.880	.760	1

Como se puede observar (a_1, a_3) y (a_3, a_2) tienen efectos de segunda generación.

Incluso es posible extender la libertad de opinión de un experto pidiéndole que exprese sus valuaciones en forma de tripletas de confianza en lugar de intervalos de confianza.

Una tripleta de confianza contituye una valoración de la verdad expresada mediante tres números:

(10.13) $\quad (a_1, a_2, a_3), \qquad a_1, a_2, a_3 \in [0,1]$
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3$$

y tal como se ha señalado en el epígrafe 8 son tratados de la misma manera que los intervalos de confianza (recuérdese las fórmulas (8.2) y (8.3)).

Para quienes conocen la teoría de los números borrosos y en particular la teoría de los números borrosos triangulares, no deben confundir una tripleta de confianza con un número borroso triangular. Este último se halla dotado de una función de pertenencia lineal de a_1 hasta a_2 y otra, también lineal, de a_2 hasta a_3. Para los extremos, la función de pertenencias es 0 y para el máximo de presunción su valor es 1. Las operaciones ($\wedge$) y ($\vee$) realizadas con números borrosos triangulares dan lugar a números borrosos que no son triangulares, excepto casos particulares. Los operadores ($\wedge$) y ($\vee$) para las tripletas de confianza proporcionan tripletas de confianza (nos liberamos de la función de pertenencia). En todo caso, el número ordinario más próximo o representativo de una tripleta de confianza viene dado por:

$$(10.14) \qquad \ulcorner a \urcorner = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4}$$

exactamente igual que para un número borroso triangular. Se dobla el peso del máximo de presunción en relación a los extremos. Esto se demuestra para un número borroso triangular y parece lo más razonable para una tripleta de confianza.

Mientras que una matriz de incidencia de un experto se presentaría de las siguiente manera:

(10.15)

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(.3, .7 , 1)	(.2, .3, .3)	(.5, .6, .8)	.8
a_2	1	(0, 0, .2)	(.4, .5, .7)	0
a_3	(.1, .2, .4)	.4	(.2, .2, .3)	(.6, .7, .8)

un expertón con tripleta de confianza se presentaría así:

(10.16)

A \ B		b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	1	1	1
	.1	1	1	.8 .9 1	1
	.2	1	1	.8 .9 1	.4 .5 .7
	.3	.8 .9 1	1	.8 .8 .9	.2 .3 .3
	.4	.8 .8 1	1	.8	0 .1 .1
	.5	.8	1	.7 .7 .8	0
	.6	.6 .7 .7	1	.7 .7 .8	0
	.7	.4 .4 .5	1	.7 .7 .8	0
	.8	.4	1	.7	0
	.9	0 .1 .2	1	.5 .6 .7	0
	1	0	1	.2 .4 .6	0
a_2	0	1	1	1	1
	.1	0	.9	1	1
	.2	0	.9	1	1
	.3	0	.7 .8 .9	.9 .9 1	1
	.4	0	.7 .7 .8	.8 .9 1	.5 .6 .7
	.5	0	.6 .7 .7	.8 .9 1	.5 .6 .6
	.6	0	.5	.8 .9 1	.5 .5 .6
	.7	0	.4 .5 .5	.4 .8 .8	.5
	.8	0	.2	.3	.4 .4 .5
	.9	0	.1	.2 .3 .3	.4
	1	0	0	.1	.4
a_3	0	1	1	1	1
	.1	1	0	.9 1 1	1
	.2	.5 .7 .8	0	.9 1 1	1
	.3	.3 .5 .5	0	.9 .9 1	.9 1 1
	.4	.1 .2 .2	0	.9	.9 .9 1
	.5	0	0	.8 .9 .9	.9
	.6	0	0	.8	.8 .8 .9
	.7	0	0	.8	.7 .8 .9
	.8	0	0	.8	.6 .7 .7
	.9	0	0	.7 .8 .8	.6
	1	0	0	.6	.6

Se operará con los expertones con tripleta de confianza de la misma manera que con los intervalos de confianza o las matrices Φ - borrosas.

También se podrían considerar cuadruples de confianza:

(10.17) (a_1, a_2, a_3, a_4)

en donde a_1 es el extremo inferior

a_4 es el extremo superior

$[a_2, a_3]$ es el intervalo de confianza del máximo de presunción

Con:

(10.18) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$

Se tiene:

(10.19) $(m_1, m_2, m_3, m_4)\ (\wedge)\ (n_1, n_2, n_3, n_4)$
$= (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3, m_4 \wedge n_4)$

(10.20) $(m_1, m_2, m_3, m_4)\ (\vee)\ (n_1, n_2, n_3, n_4)$
$= (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3, m_4 \vee n_4)$

No se deben confundir los cuadruples de confianza con los números borrosos trapezoidales de los que son una simplificación.

El número representativo de un cuadruple de confianza es:

$$\hat{a} = \frac{a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4}{6}$$

Se opera de la misma manera que con las tripletas de confianza.

11.- Las causas que actúan de intermediarias de los efectos olvidados

Se investigan las incidencias intermediarias tal como se ha señalado en el apartado 5, pero en este epígrafe vamos a entrar con más precisión en la manera de operar y estudiaremos el supuesto de matrices aleatorias borrosas y matrices con expertones.

Volvamos a tomar el ejemplo del epígrafe 5 y estudiemos el efecto olvidado (9,12): efecto del medio ambiente sobre la defensa. La figura 11.1 pone de manifiesto el detalle del proceso.

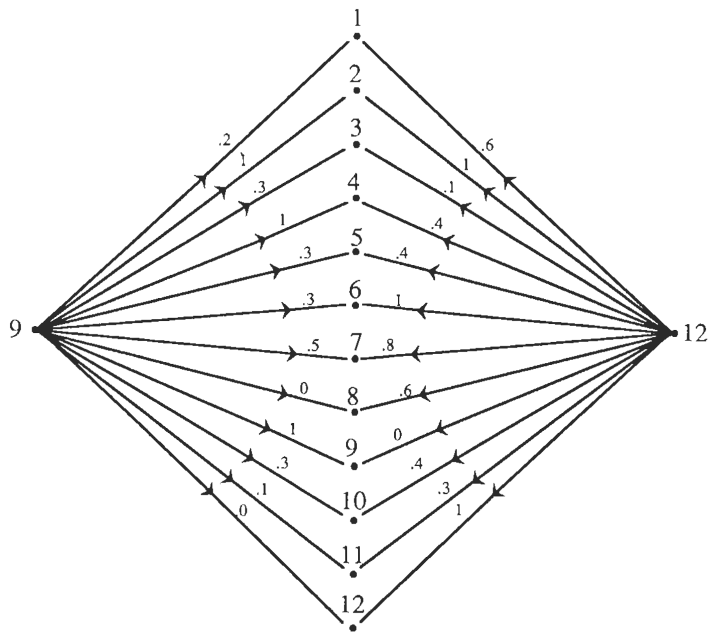


Figura 11.1

Al estudiar la figura 11.1 se observa que, buscando el máximo de las dos incidencias que se siguen al pasar (9) a (12), se obtiene éste para $1 \wedge 1 = 1$ que corresponde al camino.

$9 \rightarrow 2 \rightarrow 12$

Los otros caminos sólo proporcionan números iguales o inferiores a 0.5. Así:

$9 \rightarrow 7 \rightarrow 12$

da lugar a $0.5 \wedge 0.8 = 0.5$

Asi, pues, la causa de la incidencia de orden 2 del medio ambiente sobre la defensa pasa por la población. El medio ambiente ejerce finalmente un efecto muy intenso sobre la defensa. Para que una defensa sea potente es necesario que la población desee fuertemente defender su medio ambiente, la patria, sus costumbres, sus hábitos sociales, sus monumentos históricos, sus tradiciones.

Con objeto de obtener este máximo se puede también colocar una encima de otra la fila (9) y la columna (12)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(11.1) fila (9)	.2	1	.3	1	.3	.3	.5	0	1	.3	.1	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(11.2) columna (12)	.6	1	.1	.4	.4	1	.8	.6	0	.4	.3	1

Como puede observarse el maxmin corresponde a (2)
Vamos a repetir el proceso para (8) y (2).

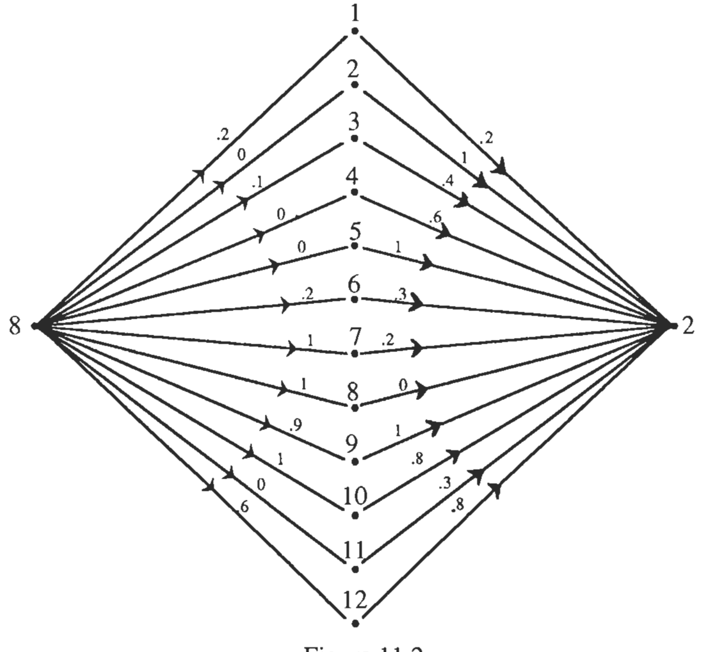


Figura 11.2

Analizando la figura 11.2 se observa que, al buscar el máximo de las dos incidencias que se siguen al pasar de (8) a (2) se obtiene el maxmin para $0.9 \wedge .1 = 0.9$ que corresponde al camino

$$8 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

Los demás caminos sólo proporcionan números iguales o inferiores a 0.6 excepto el:

$$8 \rightarrow 10 \rightarrow 2$$

que da $1 \wedge 0.8 = 0.8$

De esta manera se observa que la causa más importante de orden 2 de la energía sobre la población es el medio ambiente; se trata del conocido fenómeno de la polución industrial pero que había sido olvidado.

Se puede hacer con la fila (8) y la columna (2), lo que habíamos hecho en (11.1) y (11.2).

(11.3) fila (8)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	0	.1	0	0	.2	1	1	.9	1	0	.6

(11.4) columna (2)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	1	.4	.6	1	.3	.2	0	1	.8	.3	.8

Se observa que el maxmin corresponde a (9). Sin embargo también interviene (10). Hay que considerar pues los transportes. La energía constituye una necesidad absoluta para los transportes y los transportes tienen una gran incidencia sobre la población.

Podríamos continuar con los demás efectos primero olvidados y con esta técnica recuperados, pero preferimos seguir dejando al lector que realice los oportunos ejercicios de entrenamiento.

Vamos a estudiar ahora como se opera en el supuesto de matrices rectangulares. Para ello vamos a referirnos al ejemplo del epígrafe 6. En (6.18) se había observado la existencia de un efecto olvidado de a_2 sobre b_1. Vamos a reproducir las incidencias partiendo de a_2 para desembocar en b_1 utilizando (6.17) la composición de matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{A}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}}$ que da lugar a $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*$ (figura 11.3)

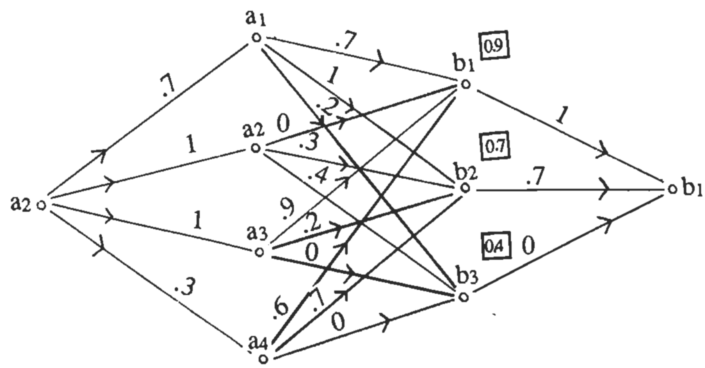


Figura 11.3

Para encontrar el camino de a_2 hasta b_1, que de lugar el maxmin se utiliza la composición maxmin buscando el camino más importante de a_2 a b_1, luego a b_2 después a b_3 y finalmente a b_4. En b_1 se compara:

$$
(11.5) \qquad
\begin{aligned}
&0.7 \wedge 0.7 = 0.7\\
&1 \wedge 0 = 0\\
&1 \wedge 0.9 = 0.9 \leftarrow\\
&0.3 \wedge 0.6 = 0.3
\end{aligned}
$$

Se retiene para b_1 el maxmin 0.9
Se continúa para b_2:

$$
(11.6) \qquad
\begin{aligned}
&0.7 \wedge 1 = 0.7 \leftarrow\\
&1 \wedge 0.3 = 0.3\\
&1 \wedge 0.2 = 0.2\\
&0.3 \wedge 0.7 = 0.3
\end{aligned}
$$

Se retiene para b_2 el maxmin 0.7
Se continua para b_3:

$$
(11.7) \qquad \begin{array}{l} 0.7 \wedge 0.2 = 0.2 \\ 1 \wedge 0.4 = 0.4 \leftarrow \\ 1 \wedge 0 = 0 \\ 0.3 \wedge 0 = 0 \end{array}
$$

Se retiene 0.4 para b_3
Ahora se continua el cálculo de b_1, b_2, b_3 hasta b_1:

$$
(11.8) \qquad \begin{array}{l} 0.9 \wedge 1 = 0.9 \leftarrow \\ 0.7 \wedge 0.7 = 0.7 \\ 0.4 \wedge 0 = 0 \end{array}
$$

Rehaciendo el camino hacia atrás se encuentra el camino óptimo que es $a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow b_1 \rightarrow b_1$ es decir $1 \wedge 0.9 \wedge 1 = 0.9$

De hecho hemos utilizado el conocido procedimiento de la programación dinámica, en donde se toma para cada etapa el máximo de los mínimos.

Se puede observar que el procedimiento utilizado es susceptible de extensión a las incidencias de orden 3, orden 4, etc...

Veamos, siempre en base al mismo ejemplo, el efecto olvidado a_1 sobre b_3 en donde se ha obtenido un efecto olvidado de 0.7 según puede comprobarse en (6.18).

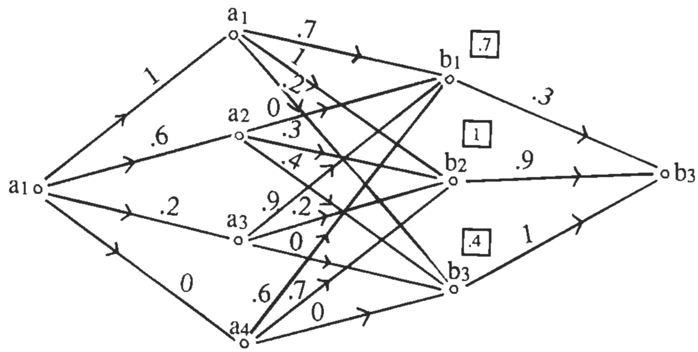


Figura 11.4

El camino obtenido en la figura 11.4 proporciona un efecto total

(11.9) $\quad 1 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.9$

para:

(11.10) $\quad a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3$

Hay que tener en cuenta el efecto de a_1 sobre b_2 y de b_2 sobre b_3.

Resulta evidente que en otros casos se van a encontrar varios caminos a considerar un lugar de uno sólo como en el supuesto que acabamos de ver.

Todo lo que hemos visto hasta ahora presentado mediante grafos puede exponerse con matrices. Si se toma, por ejemplo, la figura 11.4 y utilizamos el cálculo matricial.

(11.11)

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \end{array} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.6} & \multicolumn{1}{c|}{.2} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .7 & 1 & .2 \\ \hline a_2 & 0 & .3 & .4 \\ \hline a_3 & .9 & .2 & 0 \\ \hline a_4 & .6 & .7 & 0 \\ \hline \end{array} = a_1 \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{.7} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{.4} \\ \hline \end{array}$$

$$
(11.12) \qquad \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .7 & 1 & .4 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & .3 \\ \hline b_2 & .9 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.9
$$

Las flechas que se han marcado en (11.11) y (11.12) indican el camino ("o los" en otros casos) que proporcionan la (o las) causa intermediaria.

Existen diversos métodos de carácter combinatorio que pueden ser utilizados para encontrar los caminos cuando éstos son numerosos.

Pasemos ahora al supuesto en que las matrices son Φ - borrosas. El método que se ha propuesto continua siendo el mismo pero como los intervalos de confianza no forman en orden total sino parcial el problema se complica ligeramente. La matriz de distancias (como la (7.30)) va a indicar los efectos olvidados; cuando éstos son conocidos se seguirá el camino hacia atrás, como se ha realizado anteriormente. En efecto, si volvemos a considerar de (7.25) hasta (7.29) y se busca el camino para el efecto olvidado (a_3, b_3), se tendrá:

$$
(11.13) \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & [.2, .5] & 1 & 1 & [.8, 1] \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & [.2, .5] & 0 & [.8, 1] \\ \hline a_2 & [.4, .5] & .7 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & [.3, .9] & [0, .2] \\ \hline a_4 & .5 & [.4, .6] & .8 \\ \hline \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_3 & .5 & [.7, .9] & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
(11.14) \qquad \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_3 & .5 & [.7, .9] & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & .8 \\ \hline b_2 & [.4, .7] \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 1
$$

Las flechas indican el camino.

(11.15) $\qquad a_3 \to a_2 \to b_3 \to b_3$

En este caso el camino no hace intervenir intervalo de confianza alguno. Cuando no sucede así se buscará el camino para los extremos inferiores y el camino para los extremos superiores y se sacarán las oportunas consecuencias. Veamos, por ejemplo el efecto olvidado (a_1, b_2) para el que en (7.30) se obtuvo 0.75.

Para los extremos inferiores se calcula:

(11.16)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & .8 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} .2 & 0 & .8 \\ .4 & .7 & 1 \\ 0 & .3 & 0 \\ .5 & .4 & .8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ a_1 & \begin{bmatrix} .5 & .4 & .8 \end{bmatrix} \end{array}$$

(11.17)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ a_1 & \begin{bmatrix} .5 & .4 & .8 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} .2 \\ 1 \\ .6 \end{bmatrix} \end{array} = 0.6$$

Las flechas indican los caminos (dado que en este caso son dos)

$$(11.18)\qquad a_1 \to \begin{matrix} a_1 \\ a_4 \end{matrix} \to b_3 \to b_2$$

para los extremos inferiores.

$$(11.19)\qquad \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & .3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & 0 & 1 \\ a_2 & .5 & .7 & 1 \\ a_3 & 0 & .9 & .2 \\ a_4 & .5 & .6 & .8 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & .9 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(11.20)\qquad \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & .9 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & .3 \\ b_2 & 1 \\ b_3 & .6 \\ \hline \end{array} = 0.9$$

Las flechas indican un camino distinto:

$$(11.21)\qquad a_1 \to a_3 \to b_2 \to b_2$$

No debe extrañar que se hayan obtenido caminos diferentes para el extremo inferior y para el extremo superior, ya que en este caso las relaciones de causa a efecto son borrosas. La mayor causa que actúa de intermediaria viene dada por los extremos superiores que proporcionan 0.9, una causa con menor efecto viene dada por los extremos inferiores.

La situación se complica cuando existen varios caminos para los extremos inferiores y/o superiores; en este caso nos limitaríamos a los caminos por los extremos superiores. Una variante vendría dada con la realización de los cálculos de los caminos a partir de las medias de los intervalos de confianza tomadas de las matrices Φ- borrosas $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M}$ i $\underset{\sim}{B}$,

Para las tripletas de confianza, podemos tomar como modelo lo que se ha propuesto para los intervalos de confianza, con la realización en esta ocasión de tres cálculos: extremos inferiores, valores del máximo de presunción y extremos superiores.

Pasemos ahora al supuesto de matrices o relaciones aleatorias borrosas, que ya hemos considerado en el epígrafe 9. Se parte del conocimiento de las leyes de probabilidad y las leyes acumuladas complementarias.

(11.22)

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	.2	0
0	0	.3	0
0	0	.3	.5
0	0	.1	0
0	0	.1	.2
0	0	0	.3
0	0	0	0
0	0	0	0
1	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	.2
0	0	0	.4
0	0	.1	.2
0	0	.1	.1
0	0	.1	0
0	0	.1	0
0	0	.1	.1
0	0	.3	0
0	1	.2	0
.2	0	0	0
.4	0	0	0
.1	0	0	0
.1	.2	0	0
0	.2	0	0
0	0	0	0
.2	.3	0	0
0	.1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	.2	1	1
0	1	0	0
0	0	.4	0
0	0	.3	0
.2	0	.2	0
0	0	.1	0
.1	0	0	0
.1	0	0	0
0	0	0	0
.1	0	0	0
0	0	0	0
.5	0	0	1

(11.22) bis

$\underset{\sim}{A}$ =

		a_1	a_2	a_3	a_4
	0	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1
	.3	1	1	.8	1
	.4	1	1	.5	1
a_1	.5	1	1	.2	.5
	.6	1	1	.1	.5
	.7	1	1	0	.3
	.8	1	1	0	0
	.9	1	1	0	0
	1	1	1	0	0
	0	1	1	1	1
	.1	0	1	1	1
	.2	0	1	1	1
	.3	0	1	1	.8
	.4	0	1	1	.4
a_2	.5	0	1	.9	.2
	.6	0	1	.8	.1
	.7	0	1	.7	.1
	.8	0	1	.6	.1
	.9	0	1	.5	0
	1	0	1	.2	0
	0	1	1	1	1
	.1	.8	1	1	1
	.2	.4	1	1	1
	.3	.3	1	1	1
	.4	.2	.8	1	1
a_3	.5	.2	.6	1	1
	.6	.2	.6	1	1
	.7	0	.3	1	1
	.8	0	.2	1	1
	.9	0	.2	1	1
	1	0	.2	1	1
	0	1	1	1	1
	.1	1	0	1	1
	.2	1	0	.6	1
	.3	1	0	.3	1
	.4	.8	0	.1	1
a_4	.5	.8	0	0	1
	.6	.7	0	0	1
	.7	.6	0	0	1
	.8	.6	0	0	1
	.9	.5	0	0	1
	1	.5	0	0	1

(11.24)

		b_1	b_2	b_3
b_1	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	.7
	.3	0	0	.1
	.4	0	.2	.2
	.5	0	.1	0
	.6	0	0	0
	.7	0	.2	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	.5	0
b_2	0	1	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	.2
	.4	0	0	.2
	.5	0	0	0
	.6	0	0	.2
	.7	0	0	.1
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	1	.3
b_3	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	.2	0
	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	0	0
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.1	.2	0
	1	.3	.1	1

$\underset{\sim}{\mathfrak{B}} =$ (11.24) bis

		b_1	b_2	b_3
b_1	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	.3
	.4	1	1	.2
	.5	1	.8	0
	.6	1	.7	0
	.7	1	.7	0
	.8	1	.5	0
	.9	1	.5	0
	1	1	.5	0
b_2	0	1	1	1
	.1	0	1	1
	.2	0	1	1
	.3	0	1	1
	.4	0	1	.8
	.5	0	1	.6
	.6	0	1	.6
	.7	0	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	.3
	1	0	1	.3
b_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	1	.8	1
	.5	.6	.8	1
	.6	.5	.8	1
	.7	.5	.8	1
	.8	.5	.6	1
	.9	.4	.3	1
	1	.3	.1	1

En primer lugar se procede a la obtención de:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^* = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}}$$

Mediante la utilización de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*$ nivel a nivel se calcula:

Nivell 1

(11.25)

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*_1 = \overset{\underset{\sim}{\mathcal{A}}_1}{\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & .2 & 0 \\ a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \\ a_4 & .5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}} \circ \overset{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_1}{\begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \\ \hline \end{array}} \circ \overset{\underset{\sim}{\mathcal{B}}_1}{\begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .5 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .3 \\ b_3 & .3 & .1 & 1 \\ \hline \end{array}}$$

$$= \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & .1 & 1 \\ a_2 & .3 & .1 & 1 \\ a_3 & .3 & .2 & .7 \\ a_4 & .3 & .2 & .7 \\ \hline \end{array}$$

Nivell 0.9

(11.26)

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*_{0.9} = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & .5 & 0 \\ a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \\ a_4 & .5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & .2 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .5 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .3 \\ b_3 & .4 & .3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .4 & .3 & 1 \\ a_2 & .4 & .3 & 1 \\ a_3 & .4 & .3 & .7 \\ a_4 & .4 & .3 & .7 \\ \hline \end{array}$$

Nivell 0.8

(11.27)

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.8} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .6 & .1 \\ 0 & .2 & 1 & 1 \\ .6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & .7 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & .4 & 0 \\ .3 & .1 & .7 \end{array}\right] \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & .5 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ .5 & .6 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} .5 & .6 & 1 \\ .5 & .6 & 1 \\ .5 & .6 & .7 \\ .5 & .6 & .7 \end{array}\right] \end{array}$$

Nivell 0.7

(11.28)

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.7} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & .3 \\ 0 & 1 & .7 & .1 \\ 0 & .3 & 1 & 1 \\ .6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} .1 & 0 & .9 \\ 0 & .8 & 1 \\ 0 & .8 & 0 \\ .3 & .2 & .7 \end{array}\right] \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & .7 & 0 \\ 0 & 1 & .4 \\ .5 & .8 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} .5 & .8 & 1 \\ .5 & .8 & 1 \\ .5 & .8 & .7 \\ .5 & .7 & .7 \end{array}\right] \end{array}$$

Nivell 0.6

(11.29)

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.6} = \begin{array}{c|cccc} \curvearrowright & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & .1 & .5 \\ a_2 & 0 & 1 & .8 & .1 \\ a_3 & .2 & .6 & 1 & 1 \\ a_4 & .7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} \curvearrowright & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & 0 & .9 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .4 & .5 & .8 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} \curvearrowright & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .7 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .6 \\ b_3 & .5 & .8 & 1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|ccc} \curvearrowright & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & 1 & 1 \\ a_2 & .5 & 1 & 1 \\ a_3 & .5 & 1 & .8 \\ a_4 & .5 & .8 & .8 \end{array}$$

Nivell 0.5

(11.30)

$$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.5} = \begin{array}{c|cccc} \curvearrowright & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & .2 & .5 \\ a_2 & 0 & 1 & .9 & .2 \\ a_3 & .2 & .6 & 1 & 1 \\ a_4 & .8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} \curvearrowright & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .4 & 0 & 1 \\ a_2 & .1 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .4 & .8 & .8 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} \curvearrowright & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .8 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .6 \\ b_3 & .6 & .8 & 1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|ccc} \curvearrowright & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .6 & 1 & 1 \\ a_2 & .6 & 1 & 1 \\ a_3 & .6 & 1 & .8 \\ a_4 & .6 & .8 & .8 \end{array}$$

Nivel 0.4

(11.31)

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{*}_{0.4} = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & .5 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 & .4 \\ a_3 & .2 & .8 & 1 & 1 \\ a_4 & .8 & 0 & .1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ a_2 & .2 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & 1 & .2 \\ b_2 & 0 & 1 & .8 \\ b_3 & 1 & .8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 & 1 \\ a_4 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Al calcular $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{*}_{0.3}$ se comprobará que estará formada de 1; y lo mismo sucederá para $\alpha = 0.2$, 0.1 y 0. Recordemos, únicamente, $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.3}$, $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.2}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.1}$

Nivel 0.3

(11.32) $$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.3} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ a_2 & .3 & 1 & 1 \\ a_3 & .2 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Nivel 0.2

(11.33) $$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.2} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & .3 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Nivel 0.1

(11.34) $$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.1} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0}$ está formada, evidentemente, de 1.

Habida cuenta que la diferencia entre dos subconjuntos aleatorios borrosos no proporciona siempre un subconjunto aleatorio borroso (como consecuencia de la monotonía) se va a obtener la esperanza matemática de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*$ y la de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$. Para ello utilizaremos un método muy simple.

Este método se basa en la propiedad siguiente. Sea f(x) la densidad de probabilidad de X y F(x) la ley acumulada complementaria correspondiente. Se tendrá:

$$(11.35) \qquad \int_{x=0}^{1} F(x)\, dx = \Big[x \,.\, F(x) \Big]_{x=0}^{1} + \int_{x=0}^{1} x \,.\, f(x) \quad dx$$

$$\text{on } f(x) = -\frac{dF}{dx}$$

$$= \int_{x=0}^{1} x \,.\, f(x) \quad dx \qquad \text{(esperanza matemàtica)}$$

Ya que $x{\cdot}F(x) = 0$, para $x=0$ y $x{\cdot}F(x) = 0$ para a $x=1$ (1)

Si se consideran las particiones discretas por el sistema endecadario se tiene:

$$
\begin{aligned}
&F(1) = pr\ (1)\\
&F(0.9) = pr\ (1) + pr\ (0.9)\\
&F(0.8) = pr\ (1) + pr\ (0.9) + pr\ (0.8)\\
(11.36)\qquad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F(0.2) = pr\ (1) + pr\ (0.9) + pr\ (0.8) + \ldots + pr\ (0.2)\\
&F(0.1) = pr\ (1) + pr\ (0.9) + pr\ (0.8) + \ldots + pr\ (0.2) + pr\ (0.1)
\end{aligned}
$$

No se hace intervenir F(0) que siempre es igual a 1

Si se obtiene la suma de ambos miembros de (11.36) se tiene:

$$
\begin{aligned}
&F(1) + F(0.9) + F(0.8) + \ldots + F(0.2) + F(0.1)\\
(11.37)\qquad &= 10\ pr\ (1) + 9\ pr\ (0.9) + 8\ pr\ (0.8) + \ldots + 2\ pr\ (0.2) + pr\ (0.1)
\end{aligned}
$$

(1) En la continuidad y en [0,1] la ley acumulada complementaria resulta F(1) =0 ya que la ley acumulada $\Phi(x) = 1 - F(x)$ es igual a 1 para x=1

Se dividen los dos miembros de (11.37) por 10 y resulta:

(11.38) $$\text{pr}(1) + 0.9\ \text{pr}(0.9) + 0.8\ \text{pr}(0.8) + \ldots\ldots + 0.1\ \text{pr}(0.1)$$
$$= \frac{1}{10}\ (F(1) + F(0.9) + F(0.8) + \ldots + F(0.2) + F(0.1)) \qquad (1)$$

Bastará pues, para calcular la esperanza matemática, operar con el segundo miembro de (11.38).

Resulta, por ejemplo, para el par (a_1,b_1) de (11.25) y siguientes:

(11.39) $$\varepsilon_{\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*}(a_1, b_1) = \frac{1}{10}\ (.3 + .4 + .5 + .5 + .5 + .6 + 1 + 1 + 1 + 1)$$
$$= 0.68$$

Operando de esta manera para todos los pares de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*$ y de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ se obtendrá:

(11.40) $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*) =$

	b_1	b_2	b_3
a_1	0.68	0.78	1
a_2	0.68	0.78	1
a_3	0.68	0.79	0.84
a_4	0.68	0.74	0.84

(11.41) $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) =$

	b_1	b_2	b_3
a_1	.44	0	.83
a_2	.26	.75	1
a_3	.15	.74	0
a_4	.54	.56	.84

Ahora, dado que ya no se precisa respetar la monotonía se realiza la sustración:

(11.42) $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) =$

	b_1	b_2	b_3
a_1	.24	.78	.17
a_2	.42	.03	0
a_3	.53	.05	.84
a_4	.14	.18	0

Los pares que marcan la aparición de efectos olvidados son (a_3, b_3) y (a_1, b_2).

---

(1) Evidentemente:
$\text{pr}(1) + \text{pr}(0.9) + \text{pr}(0.8) + \ldots + \text{pr}(0.2) + \text{pr}(0.1) + \text{pr}(0) = 1$

Vamos a buscar el efecto (o los efectos) que actúa de intermediario, para el par (a_3,b_3) considerando los distintos niveles.

Nivel 1:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .3 \\ b_3 & 1 \end{array} = 0.7 \tag{11.43}$$

Las flechas indican el camino

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

Nivel 0.9

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & .2 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .3 \\ b_3 & 1 \end{array} = 0.7 \tag{11.44}$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

Nivel 0.8

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .7 \\ a_2 & 0 & .5 & 1 \\ a_3 & 0 & .4 & 0 \\ a_4 & .3 & 1 & .7 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .3 \\ b_3 & 1 \end{array} = 0.7 \tag{11.45}$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

Nivel 0.7

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & 0 & .3 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .1 & 0 & .9 \\ a_2 & 0 & .8 & 1 \\ a_3 & 0 & .8 & 0 \\ a_4 & .3 & .2 & .7 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .4 \\ b_3 & 1 \end{array} = 0.7 \tag{11.46}$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

Nivel 0.6

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .2 & .6 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & 0 & .9 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .4 & .5 & .8 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .6 \\ b_3 & 1 \end{array} = 0.8 \tag{11.47}$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

Nivel 0.5

$$(11.48)\quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .2 & .6 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .4 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & .1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .4 & .8 & .8 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ \hline b_2 & .6 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.8$$

$$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$$

Nivel 0.4

$$(11.49)\quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .2 & .8 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & .2 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & .2 \\ \hline b_2 & .8 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 1$$

$$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$$

Nivel 0.3

$$(11.50)\quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .3 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & .3 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & .2 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & .3 \\ \hline b_2 & 1 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 1$$

$$a_3 \to \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \to \begin{matrix} b_2 \\ b_3 \end{matrix} \to b_3$$

Nivel 0.2

$$(11.51)\quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .4 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & .3 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & 1 \\ \hline b_2 & 1 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 1$$

$$a_3 \to \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \to \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \to b_3$$

$$(11.52)\quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .8 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 1 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & 1 \\ \hline b_2 & 1 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 1$$

$$a_3 \to \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \to \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \to b_3$$

En todos los niveles se encuentra $a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$. (1)

Este método resulta muy laborioso cuando los conjuntos comprenden un elevado número de elementos. Aunque menos rigurosa (la operación maxmin no es lineal) puede resultar útil una variante que consiste en obtener la esperanza matemática de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ directamente.

(1) En general se pueden encontrar caminos diferentes, según el nivel que se considere; en este caso hay que tomar en cuenta aquel (o aquellos) que hace referencia a los niveles más altos de α

Las relaciones aleatorias borrosas (11.22), (11,23) y (11.24) son sustituídas por su esperanza matemática (se "desacumulan" las relaciones aleatorias borrosas y se obtienen las esperanzas matemáticas. Como normalmente cada experto proporciona sus matrices borrosas basta con calcular las medias).

Una vez realizados los cálculos resulta:

$$\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0.36 & 0.53 \\ a_2 & 0 & 1 & 0.77 & 0.37 \\ a_3 & 0.21 & 0.59 & 1 & 1 \\ a_4 & 0.75 & 0 & 0.20 & 1 \\ \hline \end{array} \tag{11.53}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.44 & 0 & 0.83 \\ a_2 & 0.26 & 0.75 & 1 \\ a_3 & 0.15 & 0.74 & 0 \\ a_4 & 0.54 & 0.56 & 0.84 \\ \hline \end{array} \tag{11.54}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{B}}) = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & 0.77 & 0.25 \\ b_2 & 0 & 1 & 0.63 \\ b_3 & 0.68 & 0.72 & 1 \\ \hline \end{array} \tag{11.55}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{B}}) = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.68 & 0.75 & 1 \\ a_2 & 0.68 & 0.75 & 1 \\ a_3 & 0.68 & 0.74 & 0.84 \\ a_4 & 0.68 & 0.72 & 0.84 \\ \hline \end{array} \tag{11.56}$$

(11.57)

$$\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{B}}) - \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.24 & 0.75 & 0.17 \\ \hline a_2 & 0.42 & 0 & 0 \\ \hline a_3 & 0.53 & 0 & 0.84 \\ \hline a_4 & 0.14 & 0.16 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Se obtienen los efectos olvidados (a_3,b_3) y (a_1,b_2) seguidos de (a_3,b_1). El resultado es el mismo que el obtenido en (11.42) en relación con el orden pero con valores ligeramente distintos dado que se ha seguido un proceso diferente.

Cuando nos encontramos con matrices de tamaño elevado habida cuenta que la precisión no resulta extremadamente importante, resulta aconsejable este último procedimiento que utiliza las esperanzas matemáticas directamente, como se ha realizado en (11.53) a (11.57).

El estudio de las causas que actúan como intermediarias en el supuesto de valuaciones por intervalos de confianza o la utilización de expertones se realiza de manera similar dado que el método sigue siendo el mismo. Se separan todas las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ en dos, las de los extremos inferiores, $\mathcal{A}_*$, $\mathcal{M}_*$, $\mathcal{B}_*$ y las de los extremos superiores $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{B}^*$ y, para los dos grupos de matrices se opera de la misma manera que de (11.43) a (11.52); también se puede operar con las esperanzas matemáticas de los expertones y se estudian los caminos de los efectos olvidados. Es posible también utilizar diversas variantes.

Sea cual fuere el tipo de valuación utilizado el supuesto de matrices cuadradas $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \subset E \times E$ es evidentemente más sencillo ya que las operaciones de composición maxmin son menos numerosas.

Resulta sin embargo muy importante que la investigación de los efectos olvidados se realice en diálogo hombre máquina ya que se trata, de hecho, de una especie de sistema experto.

12.- Diversas propiedades de las matrices borrosas reflexivas

Vamos a poner de manifiesto tres teoremas sencillos

Teorema 12-I

Sea $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ una matriz borrosa reflexiva,es decir, tal que:

(12.1) $\quad \forall x \in E: \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x, x) = 1$

en este caso $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2$ es también una matriz borrosa reflexiva, es decir:

(12.2) $\quad \forall x \in E: \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2}(x, x) = 1$

Demostración:
Se tiene, por definición

$\forall x, y, z \in E$:

(12.3) $\quad \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,z) = \bigvee_{y} \left(\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(y,z) \right)$

si z = x, resulta:

(12.4) $\quad \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,x) = \bigvee_{y} \left(\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(y,x) \right)$

De entre todos los (x,y) existe por lo menos uno para el cual $\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,y) = 1$ que es $\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,x)$ es decir cuando y = x, y

(12.5) $\quad \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,x) = \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,x) = 1 \wedge 1 = 1$

Por ello se puede decir que:

(12.6) $\quad (\underset{\sim}{\mathfrak{M}} \text{ reflexiva}) \Longrightarrow (\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2 \text{ reflexiva})$

y de manera más general:

(12.7) $\quad (\underset{\sim}{\mathfrak{M}} \text{ reflexiva}) \Longrightarrow (\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^r \text{ reflexiva})$

r= 2,3,4...

Teorema 12-11

Si $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ es una matriz borrosa reflexiva, se cumplirá:

$$\forall x, y \in E:$$

(12.8) $$\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2}(x,y) \geq \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,y)$$

es decir:

(12.9) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2 \supset \underset{\sim}{\mathfrak{M}}$$

Desmostración:

En relación con la fórmula (12.3) se puede afirmar que el segundo miembro contiene por lo menos dos términos iguales, si $x \neq z$:

(12.10) $$\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,z) = \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,z) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(z,z)$$

(12.11) $$= \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,z)$$

ya que:

(12.12) $$\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,x) = \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(z,z) = 1$$

Asi pues, $\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2}(x, z)$ es por lo menos igual a $\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x, z)$ ya que como consecuencia de $\bigvee_y$ no puede ser más pequeño. Por el contrario, puede existir un $\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x, z)$ que sea mayor que $\mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x, z)$, por lo que:

(12.13) $$\forall x,y \in E: \qquad \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2}(x,y) \geq \mu_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(x,y)$$

es decir:

(12.14) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^2 \supset \underset{\sim}{\mathfrak{M}}$$

y de manera más general:

(12.15) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{r+1} \supset \underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{r}, \quad r = 1, 2,3,4, \ldots$$

Teorema 12-III (1)

Sean $\underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}}$ y $\underset{n\times n}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}$ dos matrices borrosas reflexivas; si se hace:

$$(12.16) \qquad \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}{}^{*} = \underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}} \circ \underset{n\times n}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}$$

se tendrá que:

$$(12.17) \qquad \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}{}^{*} \supset \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}$$

Demostración:

Supontagmos que $\underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}}{}'$ es una matriz unidad (es decir formada de 1 en la diagonal y el resto de 0). se podrá escribir:

$$(12.18) \qquad \underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}} = \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}$$

pero:

$$(12.19) \qquad \underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \supset \underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}}{}'$$

en donde:

$$(12.20) \qquad \underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}} \supset \underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}}{}' \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}} \supset \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}$$

Supongamos ahora que $\underset{n\times n}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}'$ es también una matriz unidad

$$(12.21) \qquad (\underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}) \circ \underset{n\times n}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}' = \underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}$$

pero como:

$$(12.22) \qquad \underset{n\times n}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}} \supset \underset{n\times n}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}'$$

se deduce que:

$$(12.23) \qquad (\underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}) \circ \underset{n\times n}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}} \supset (\underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}) \circ \underset{n\times n}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}{}' \supset (\underset{m\times m}{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}})$$

(1) La propiedad de este teorema ha quedado demostrada en el epígrafe 6, pero la hemos recogido aquí con objeto de realizar una demostración más rigurosa.

y teniendo en cuenta (12.20) se obtiene:

(12.24) $$(\underset{m\times m}{\tilde{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\tilde{\mathfrak{M}}}) \circ \underset{n\times n}{\tilde{\mathbf{B}}} \supset \underset{m\times n}{\tilde{\mathfrak{M}}}$$

Finalmente, dado que el operador $\circ$ es asociativo:

(12.25) $$\underset{m\times m}{\tilde{\mathcal{A}}} \circ \underset{m\times n}{\tilde{\mathfrak{M}}} \circ \underset{n\times n}{\tilde{\mathbf{B}}} \supset \underset{m\times n}{\tilde{\mathfrak{M}}}$$

De manera más general:

$$\underset{m\times m}{\tilde{\mathcal{A}}^{r+1}} \circ \underset{m\times n}{\tilde{\mathfrak{M}}} \circ \underset{n\times n}{\tilde{\mathbf{B}}^{r+1}} \supset \underset{m\times m}{\tilde{\mathcal{A}}^{r}} \circ \underset{m\times n}{\tilde{\mathfrak{M}}} \circ \underset{n\times n}{\tilde{\mathbf{B}}^{r}}$$

$r = 0,1,2,3,\ldots$

Vamos a prescindir de los ejemplos numéricos en relación con la utilización de estos teoremas, por haber sido realizado en los epígrafes anteriores.

Estos tres teoremas se aplican por extensión, sin problema alguno, a las matrices Φ-borrosas, a las matrices aleatorias borrosas y a las matrices con expertones; evidentemente respetando los elementos específicos contenidos en cada una de estas extensiones.

13.- Otros procedimientos para los efectos olvidados

Si $\underset{m\times n}{\tilde{\mathfrak{M}}}_{12}$ es una matriz borrosa que proporciona las incidencias de E_1 sobre E_2 y si $\underset{n\times p}{\tilde{\mathfrak{M}}}_{23}$ es una matriz borrosa que da las incidencias de E_2 sobre E_3, puede ser interesante conocer las incidencias de E_1, sobre E_3 a través de las de E_1 sobre E_2 y de E_2 sobre E_3.

En este caso se calculará:

(13.1) $$\underset{m\times p}{\tilde{\mathfrak{M}}}_{13} = \underset{m\times n}{\tilde{\mathfrak{M}}}_{12} \circ \underset{n\times p}{\tilde{\mathfrak{M}}}_{23}$$

Los efectos olvidados pueden ser obtenidos si se ha establecido a priori $\tilde{\mathfrak{M}}'_{13}$ que proporciona la incidencias directas de E_1, sobre E_3. No existe razón alguna para que $\tilde{\mathfrak{M}}'_{13}$ domine a $\tilde{\mathfrak{M}}_{13}$ o reciprocamente. En este caso se encontrarán las desviaciones que pueden ser positivas, nulas o negativas. Cuando estas desviaciones son demasiado importantes se buscan los efectos que actúan de intermediarios y se modifican eventualmente las incidencias

Veamos un ejemplo:
Se establece una matriz de incidencias de A sobre C, como la siguiente:

(13.2)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AC} =$

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	.2	1	.6	1
a_2	.5	.2	.5	.2
a_3	.4	.8	1	.3

Luego, a través de otro estudio se establece la matriz de incidencia de A sobre B y de B sobre C:

(13.3)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	.7	.8	0	.4	1
a_2	1	1	.2	0	.3
a_3	0	.4	0	.7	.5

(13.4)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{BC} =$

	c_1	c_2	c_3	c_4
b_1	.3	.2	.4	1
b_2	0	.3	.5	.9
b_3	.8	.4	.5	0
b_4	0	.3	.6	.9
b_5	.8	.8	1	1

De ahí se obtiene:

(13.5)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB} \circ \mathfrak{M}_{BC} =$

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	.8	.8	1	1
a_2	.3	.3	.5	1
a_3	.5	.5	.6	.7

Se calculan las desviaciones:

(13.6)

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{AC} - \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{AB} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{BC} =$$

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	- 0.6	0.2	- 0.4	0
a_2	0.2	- 0.1	0	- 0.8
a_3	- 0.1	0.3	0.4	- 0.4

Como se puede observar, la desviación más importante viene dada por (a_2,b_4), veamos porque se produce en la figura 13.1:

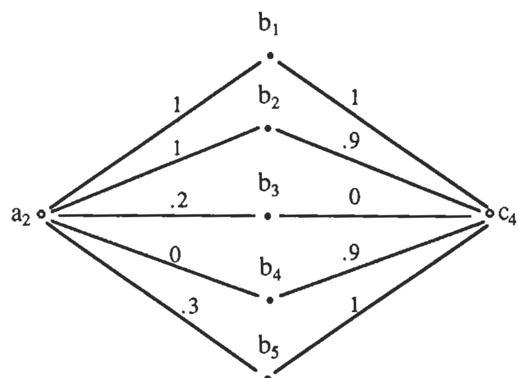


Figura 13.1

Se comprueba fácilmente que hubiera sido necesario tener en cuenta los efectos que actúan de intermediarios (a_2, b_1, c_4) y (a_2,b_2, c_4).

Se podría estudiar, de la misma manera, la desviación encontrada en (a_1,c_1).

Pasemos ahora a ver otro caso que puede presentarse.

Se determina una matriz de incidencia de A sobre A (por lo tanto una matriz cuadrada reflexiva) y despúes una matriz de incidencia rectangular de A sobre B, que escribiremos $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{AB}$. Deberá calcularse:

(13.7) $$\underset{\sim}{\mathcal{M}}'_{AB} = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{AB}$$

En virtud de lo demostrado en el epígrafe anterior se puede escribir:

(13.8) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}'_{AB} \supset \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB}$$

y se procede a calcular: $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}'_{AB} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB}$ que puede proporcionar los efectos olvidados

De la misma manera si se tiene $\mathfrak{B}$ sobre $\mathfrak{B}$ y $\mathcal{A}$ sobre $\mathfrak{B}$, se calculará:

(13.9) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}''_{AB} = \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}}$$

y luego $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}''_{AB} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB}$ que puede dar los efectos olvidados.

La asociación de estos dos efectos proporciona la relación:

(13.10) $$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}'''_{AB} = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{AB} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}}$$

ya utilizada en páginas anteriores.

No terminan aquí las posibilidades, sino que a partir de cuanto se ha visto se abren amplios caminos para la elaboración de nuevos procesos.

PARTE II
APLICACIONES A PROBLEMAS DE GESTION

OPERATIVIDAD DE LOS MODELOS EN LOS FENOMENOS SOCIALES

14.- Los efectos olvidados en el ámbito político

Son tan frecuentes las campañas políticas que preceden a unas elecciones, sean estas generales, municipales, etc., que pasan ante nuestros ojos sin que trasluzca, en muchas ocasiones, el gran trabajo que expertos en el tema realizan para colocar a sus candidatos en posición de vencedores en esta lucha para ocupar unas plazas de gestión pública.

Los esfuerzos de estos profesionales van destinados, normalmente, a presentar ante la opinión pública (eventuales votantes) los aspectos más positivos de unas personas, subrayando aquellos que más directamente pueden provocar el voto de un mayor número de ciudadanos.

En el seno de los partidos políticos se seleccionan según criterios variados a las personas que van a presentar ante el electorado unos ideales y unos programas y que potencialmente son susceptibles de cubrir los escaños del Parlamento o los cargos municipales, entre otros.

Los políticos elegidos tienen unas características personales que los distinguen de los otros. Entre ellas se podrían citar:

1º Antigüedad en el partido
2º Servicios prestados
3º Estudios realizados y profesión
4º Imagen pública
5º Aspecto físico (talla, volumen,...)
6º Manera de vestir
7º Timbre de voz
8º Manera de expresarse

9º Vocabulario
10º Capacidad de comunicación
11º Simpatía personal
12º Ingenio en el diálogo

Esta lista, que evidentemente no tiene carácter exhaustivo, podrá ser distinta según el país y la época en que tengan lugar las elecciones.

Una vez determinado el candidato o la lista de candidatos se prepara la campaña electoral, que consistirá en mover determinados dispositivos de tal manera que lleguen unos mensajes a los electores dirigidos a afirmar o cambiar sus intenciones de voto a través de mejorar la idea que se tiene de los candidatos.

Ahora bien, la "apreciación" que se tiene de un candidato es la resultante de la agregación de determinadas estimaciones subjetivas sobre ciertas "cualidades" que se cree son poseídas por aquel. Sin pretender recogerlas en su totalidad, hemos considerado las siguientes:

1) Buena imagen, 2) Simpatía popular, 3) Sensación de confianza, 4) Seriedad, 5) Firmeza de ideas, 6) Acercamiento al electorado, 7) Popularidad, 8) Competencia, 9) Laboriosidad,, 10) Capacidad técnica, 11) Prestigio personal y 12) Honradez.

Así, pues, se puede suponer, como hipótesis de trabajo, que las 12 características personales del candidato, citadas anteriormente, dan lugar a que el electorado se forme una idea del mismo a través de la apreciación de estas 12 cualidades. El objetivo de la campaña electoral consistirá en el intento de aumentar el grado de las distintas "cualidades" para que el candidato aumente en la apreciación de los electores y obtenga un mayor número de votos.

Esto se puede conseguir a través de ciertas acciones en determinados medios las cuales influirán en las cualidades del candidato en distinto grado. Se trata en definitiva de una relación directa de causa a efecto. Así un anuncio en la prensa, por ejemplo, incidirá con distinta intensidad en la popularidad que en el prestigio personal.

A título de ensayo, se han considerado 16 acciones capaces de modificar las cualidades captadas del candidato:

1) Declaraciones en T.V., 2) Noticas en T.V., 3) Publicidad en T.V., 4) Declaraciones radio, 5) Noticias radio, 6) Publicidad radio, 7) Artículos prensa, 8) Noticias prensa, 9) Publicidad prensa, 10) Posters calle, 11) Coches publicitarios, 12) Publicación libro, 13) Conferencias, 14) Mítines políticos, 15) Reuniones de grupo y 16) Paseo en los mercados.

Se acepta así que existen unas relaciones directas de causa a efecto entre las acciones en cualquiera de estos medios y su repercusión en las cualidades de los candidatos que los votantes captan. Ahora bien la acción en uno cualquiera de estos medios incidirá, en distinto grado, en cada una de las cualidades. Así el paseo por un mercado podrá aumentar mucho la popularidad del candidato, incidirá menos en la sensación de confianza que inspira al electorado, pero no tendrá repercusión alguna en la capacidad técnica del mismo.

El análisis de las relaciones entre cada causa y cada uno de los efectos dará lugar a una matriz rectangular de 16 x 12 casillas en cada una de las cuales aparecerá la incidencia directa de cada medio en cada cualidad. Si, con objeto de realizar las correspondientes valuaciones utilizamos el sistema endecadario {0, 0.1, 0.2,... 0.9, 1} en cada una de las casillas aparecerá un número en [0,1].

Hemos propuesto este esquema a un grupo de expertos para obtener de ellos su opinión en relación con estas relaciones y, después de las correspondientes discusiones, han llegado a un consenso en la valuación de sus sensaciones, señalando que, en la actualidad y en el medio social en que se mueven, se podrá aceptar la matriz de incidencia cualitativa que presentamos en la figura 14.1

Hay que dejar bien sentado que esta matriz carece de validez con carácter de generalidad, dado el reducido grupo de expertos que han intervenido en su elaboración y su relativa representatividad dentro de la población, el camino que hemos seguido para obtenerla y el hecho de que se circunscriba a una zona geográfica muy concreta. Sin embargo esto no modifica en absoluto el esquema propuesto.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\mathfrak{M}$	Buena imagen	Simpatía popular	Sensación de confianza	Seriedad	Firmeza de ideas	Acercamiento electorado	Popularidad	Competencia	Laboriosidad	Capacidad técnica	Prestigio personal	Honradez
1	Declaraciones T.V.	.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.1	.4	.3	.2
2	Noticias en T.V.	.6	.6	.4	.5	.2	.8	.9	.5	.3	.5	.6	.3
3	Publicidad T.V.	.7	.9	.5	.3	.7	1	.8	.6	.3	.2	.1	.2
4	Declaraciones radio	0	.3	.4	.5	.7	.5	.2	.3	.1	.4	.2	.2
5	Noticias radio	0	.1	.2	.1	.4	0	.3	.2	0	.3	.5	.2
6	Publicidad radio	.2	.4	.3	0	.3	.5	.4	.1	0	.1	.1	.1
7	Artículos prensa	.1	0	.1	.6	.7	0	0	.8	.6	1	.9	.3
8	Noticias prensa	.2	.1	.1	.2	.2	.1	0	.1	0	.1	.2	.2
9	Publicidad prensa	.3	.2	0	0	.4	.3	.5	0	0	0	.1	.1
10	Posters calles	.5	.6	0	0	0	.8	.7	0	0	0	0	0
11	Coches publicitarios	0	0	0	0	0	.2	.3	0	0	0	0	0
12	Publicación libro	.1	.1	0	.4	.1	0	.2	.9	.8	.7	1	.4
13	Conferencias	.2	0	.6	.8	.7	.1	0	.8	.5	.6	.4	.1
14	Mitines políticos	.3	.6	.7	.4	.9	.7	.8	.3	.2	0	.2	.6
15	Reuniones de grupo	.4	0	.7	.8	.7	0	0	.7	.2	.6	.4	.8
16	Paseo mercados	.7	.8	.5	0	0	1	.7	0	0	0	0	0

Figura 14.1

A través de la matriz presentada en la figura 14.1 se ha conseguido una clarificación de las relaciones directas de causa a efecto. Pero si detuvieramos aquí nuestro análisis, no se habría llegado más lejos que con la utilización de cualquier otra técnica apta para ordenar relaciones. Nuestro objetivo es, sin embargo, otro: Tratamos de determinar qué efectos produce una causa por sí misma y a través de otra relación efecto-causa, de manera que en todo efecto se habrá acumulado el resultado de una causa directa y el producido a través de un camino indirecto (efecto secundario)

Para ello vamos a seguir el proceso que a continuación detallamos.

Se establece una matriz cuadrada $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ en la cual se colocan como filas y columnas las "causas" que, en este caso, vendrán dadas por las acciones que deberán realizarse con objeto de conseguir los efectos deseados, tales como "declaraciones en T.V.", "noticias en T.V.",..., "reuniones de grupo", "paseos en los mercados". Se solicita a uno o varios expertos que den su opinión sobre la incidencia de cada causa sobre las demás (sobre sí misma será siempre total y por tanto igual a 1), de tal manera que cada concepto será a la vez causa y efecto. La valuación se realizará por el sistema endecadario en el segmento [0,1].

Así, los expertos opinan que la incidencia de una declaración en T.V. sobre una noticia de prensa es 0.6, lo que indica que la prensa recoge en bastante medida lo que se declara en T.V., mientras que resulta poco posible que una conferencia pronunciada por un candidato dé lugar a unas declaraciones en la radio, por ejemplo (casilla 13,4). Esto es, por lo menos lo que han opinado en este caso los expertos.

Al reunir la totalidad de opiniones se ha elaborado la matriz borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ que se presenta en la figura 14.2.

	$\underset{\sim}{A}$	1 Declaraciones T.V.	2 Noticias en T.V.	3 Publicidad T.V.	4 Declaraciones radio	5 Noticias radio	6 Publicidad radio	7 Artículos prensa	8 Noticias prensa	9 Publicidad prensa	10 Posters calles	11 Coches publicitarios	12 Publicación libro	13 Conferencias	14 Mitines políticos	15 Reuniones de grupo	16 Paseo mercados
1	Declaraciones T.V.	1	.7	0	.5	.6	0	0	.6	0	0	0	.2	.2	0	0	0
2	Noticias en T.V.	.4	1	0	0	.4	0	0	.4	0	0	0	0	.1	0	.4	0
3	Publicidad T.V.	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.2	0	.3	0
4	Declaraciones radio	.3	.5	0	1	.8	0	0	.5	0	0	0	.2	.1	0	.2	0
5	Noticias radio	.1	.4	0	.2	1	0	0	.5	0	0	0	0	.1	0	.2	0
6	Publicidad radio	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	.2	0	.2	0
7	Articulos prensa	.2	.4	0	.3	.5	0	1	.1	0	0	0	.3	.4	0	.5	0
8	Noticias prensa	.3	.4	0	.2	.5	0	0	1	0	0	0	0	.3	0	.4	0
9	Publicidad prensa	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	.4	0
10	Posters calles	0	.1	0	0	.2	0	0	.2	0	1	0	0	0	0	.1	0
11	Coches publicitarios	0	.3	0	0	.4	0	0	.4	0	0	1	0	0	0	.1	0
12	Publicación libro	.6	.7	.6	.7	.8	.7	.8	.8	.8	.5	.6	1	.9	0	.7	0
13	Conferencias	.1	.6	0	.3	.7	0	.6	.7	0	0	0	.7	1	0	.6	0
14	Mitines políticos	.6	.8	0	.7	.9	0	0	.9	0	0	.5	0	0	1	.2	0
15	Reuniones de grupo	.1	.4	0	.2	.5	0	0	.5	0	0	0	0	.2	0	1	0
16	Paseo mercados	0	.3	0	0	.4	0	0	.4	0	.4	0	0	0	0	0	1

Figura 14.2

Una vez llegados a este punto se pasa a elaborar una nueva matriz cuadrada $\underset{\sim}{B}$ formada por la relación borrosa de causa a efecto en la que tanto filas como columnas comprenden lo que en la matriz $\underset{\sim}{M}$ eran los "efectos". Es evidente que la "simpatía popular", por ejemplo, tiene una gran incidencia sobre el "acercamiento al electorado" (en nuestro caso los expertos han asignado a esta relación una valuación de 0.9) mientras que nuestros expertos han opinado que la "buena imagen" incide poco en la "capacidad técnica" (han asignado a esta relación una valuación de 0.2).

Siguiendo el mismo proceso que el utilizado para las relaciones de incidencia anteriores se ha construído la matriz borrosa $\underset{\sim}{B}$ de la figura 14.3.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\underset{\sim}{B}$	Buena imagen	Simpatía popular	Sensación de confianza	Seriedad	Firmeza de ideas	Acercamiento electorado	Popularidad	Competencia	Laboriosidad	Capacidad técnica	Prestigio personal	Honradez
1	Buena imagen	1	.5	.6	.6	.2	.8	.8	.3	.1	.2	.3	.5
2	Simpatía popular	.7	1	.5	.2	.4	.9	1	0	0	0	.2	.4
3	Sensación de confianza	.6	.5	1	.9	0	.8	.4	0	0	0	.1	1
4	Seriedad	.3	0	.7	1	.5	0	0	.2	.1	0	.5	.5
5	Firmeza de ideas	.6	.4	.8	.9	1	.1	.2	0	0	0	.3	.4
6	Acercamiento electorado	.2	1	.9	0	0	1	1	0	0	0	0	0
7	Popularidad	.5	1	.2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
8	Competencia	.7	.3	.8	.9	0	0	0	1	0	.6	.8	0
9	Laboriosidad	.7	.7	.5	.4	0	0	.1	.3	1	.8	.6	0
10	Capacidad técnica	.5	.1	0	.4	0	0	.2	.9	0	1	.7	0
11	Prestigio personal	.8	.5	.7	.6	.5	0	.1	0	0	0	1	0
12	Honradez	.9	.8	1	1	0	.3	.6	.1	0	0	.8	1

Figura 14.3

Una vez obtenidas las informaciones plasmadas en las matrices de incidencia borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$, vamos a realizar los cálculos necesarios para obtener una nueva matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ resultado de la convolución maxmin entre $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$. Asi, pues, en la casilla (1,1) se colocará 0.9 resultado de comparar la fila 1 de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ y de la columna 1 de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$.

(14.1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
fila 1 de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$	1	.7	0	.5	.6	0	0	.6	0	0	0	.2	.2	0	0	0
columna 1 de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$	.9	.6	.7	0	0	.2	.1	.2	.3	.5	0	.1	.2	.3	.4	.7
	↑															

En efecto el maxmin será:

(14.2)

$(1\wedge.9) \vee (.7\wedge.6) \vee (0\wedge.7) \vee (.5\wedge0) \vee (.6\wedge0) \vee (0\wedge.2) \vee (0\wedge.1) \vee (.6\wedge.2) \vee (0\wedge.3) \vee (0\wedge.5) \vee (0\wedge0) \vee (.2\wedge.1) \vee (.2\wedge.2) \vee (0\wedge.3) \vee (0\wedge.4) \vee (0\wedge.7) =$

$.9 \vee .6 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee .2 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee .1 \vee .2 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = .9$

En la casilla (1,2) se debe colocar 0.7 ya que al ser:

(14.3)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
la fila 1 de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$	1	.7	0	.5	.6	0	0	.6	0	0	0	.2	.2	0	0	0
la columna 2 de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$	.7	.6	.9	.3	.1	.4	0	.1	.2	.6	0	.1	0	.6	0	.8
	↑															

se tendrá que $.7 \vee .6 \vee 0 \vee .3 \vee .1 \vee 0 \vee 0 \vee .1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee .1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = .7$

Y así sucesivamente se llegará a la obtención de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ que aparece en la figura 14.4.

	$\mathcal{A} \circ \mathcal{M}$	1 Buena imagen	2 Simpatía popular	3 Sensación de confianza	4 Seriedad	5 Firmeza de ideas	6 Acercamiento electorado	7 Popularidad	8 Competencia	9 Laboriosidad	10 Capacidad técnica	11 Prestigio personal	12 Honradez
1	Declaraciones T.V.	.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.3	.5	.6	.3
2	Noticias en T.V.	.6	.6	.4	.5	.4	.8	.9	.5	.3	.5	.6	.4
3	Publicidad T.V.	.7	.9	.5	.3	.7	1	.8	.6	.3	.3	.3	.3
4	Declaraciones radio	.4	.5	.4	.5	.7	.5	.5	.5	.3	.5	.5	.3
5	Noticias radio	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.4	.5	.3
6	Publicidad radio	.2	.4	.3	.2	.3	.5	.4	.2	.2	.2	.2	.2
7	Artículos prensa	.4	.4	.5	.6	.7	..4	.4	.8	.6	1	.9	.5
8	Noticias prensa	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.4	.5	.4
9	Publicidad prensa	.4	.2	.4	.4	.4	.3	.5	.4	.2	.4	.4	.4
10	Posters calles	.5	.6	.2	.2	.2	.8	.7	.2	.1	.2	.2	.2
11	Coches publicitarios	.3	.3	.3	.3	.4	.3	.3	.3	.3	.3	.4	.3
12	Publicación libro	.6	.6	.7	.8	.7	.7	.7	.9	.8	.8	1	.7
13	Conferencias	.6	.6	.6	.8	.7	.6	.6	.8	.7	.7	.7	.6
14	Mitines políticos	.6	.6	.7	.6	.9	.8	.8	.5	.3	.5	.6	.6
15	Reuniones de grupo	.4	.4	.7	.8	.7	.4	.4	.7	.3	.6	.5	.8
16	Paseo mercados	.7	.8	.5	.3	.4	1	.7	.3	.3	.3	.4	.3

Figura 14.4

Una vez llegados a este punto y con objeto de hallar los <u>efectos acumulados</u> de 1ª y 2ª generación bastará obtener por convolución maxmin entre $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{M}}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ una nueva matriz de incidencia borrosa $\tilde{\mathcal{M}}^* = \tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{M}} \circ \tilde{\mathcal{B}}$, siguiendo el procedimiento anteriormente descrito. El resultado viene expresado en la figura 14.5.

	$\tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{M}} \circ \tilde{\mathcal{B}}$	1 Buena imagen	2 Simpatía popular	3 Sensación de confianza	4 Seriedad	5 Firmeza de ideas	6 Acercamiento electorado	7 Popularidad	8 Competencia	9 Laboriosidad	10 Capacidad técnica	11 Prestigio personal	12 Honradez
1	Declaraciones T.V.	.9	.8	1	.9	1	.8	.8	.5	.3	.5	.6	1
2	Noticias en T.V.	.6	.9	.8	.6	.5	.9	.9	.5	.3	.5	.6	.5
3	Publicidad T.V.	.7	1	.9	.7	.7	1	1	.6	.3	.6	.6	.5
4	Declaraciones radio	.6	.5	.7	.7	.7	.5	.5	.5	.3	.5	.5	.5
5	Noticias radio	.5	.5	.5	.5	.5	.4	.4	.4	.3	.4	.5	.4
6	Publicidad radio	.4	.5	.5	.3	.4	.5	.5	.2	.2	.2	.3	.4
7	Artículos prensa	.8	.6	.8	.8	.7	.5	.5	.9	.6	1	.9	.5
8	Noticias prensa	.5	.5	.5	.5	.5	.4	.4	.4	.3	.4	.5	.4
9	Publicidad prensa	.5	.5	.4	.4	.4	.5	.5	.4	.2	.4	.4	.4
10	Posters calles	.6	.8	.8	.5	.4	.8	.8	.3	.1	.2	.3	.5
11	Coches publicitarios	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.3	.3	.3	.3	.4	.4
12	Publicación libro	.8	.7	.8	.9	.7	.7	.7	.9	.8	.8	1	.7
13	Conferencias	.7	.7	.8	.8	.7	.6	.6	.8	.7	.7	.8	.6
14	Mitines políticos	.6	.8	.8	.9	.9	.8	.8	.5	.3	.5	.6	.7
15	Reuniones de grupo	.8	.8	.8	.8	.7	.7	.6	.7	.3	.6	.8	.8
16	Paseo mercados	.7	1	.9	.6	.4	1	1	.3	.3	.3	.4	.5

Figura 14.5

Para hallar los efectos de segunda generación será necesario arbitrar un procedimiento que de alguna manera permita separar de los efectos acumulados que aparecen en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*$ los directos que vienen dados mediante la matriz de incidencia originaria $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$. Como ha sido reiteradamente señalado se pueden utilizar distintos procedimientos. En este caso creemos que puede resultar adecuada la simple diferencia algebraíca $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^* - \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ que se obtendrá restando, en cada casilla, de la cifra correspondiente a la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*$ la de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$

Así se tendrá para la casilla (1.1) un 0 al ser 0.9 - 0.9 =0 para la casilla (1.2) un 0.1 al ser 0.8 - 0.7 = 0.1, para la casilla (1.3) un 0 al ser 1 -1 = 0 , ... y así hasta obtener para la casilla (16.12) un 0.5 dado que 0.5 - 0 = 0.5.

La Matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^* - \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ que aparece en la figura 14.6 pone de manifiesto los efectos de segunda generación. En ella se puede observar que aparecen algunas casillas en las que se dan unas cifras cercanas a la unidad como es el caso de la (1.12) efecto de las "declaraciones de T.V." sobre la "honradez" con un 0.8; el de la (10.3) efecto de los "posters de la calle" sobre la "sensación de confianza" con un 0.8; el de la (12.3) efecto de la "publicación de libros" sobre la "sensaciÓn de confianza" con un 0.8; y el de la (15.2) efecto de las "reuniones de grupo" sobre la "simpatía popular" también con un 0.8.

	$\underset{\sim}{M}^* - \underset{\sim}{M}$	1 Buena imagen	2 Simpatía popular	3 Sensación de confianza	4 Seriedad	5 Firmeza de ideas	6 Acercamiento electorado	7 Popularidad	8 Competencia	9 Laboriosidad	10 Capacidad técnica	11 Prestigio personal	12 Honradez
1	Declaraciones T.V.	0	.1	0	.1	0	0	.1	0	.2	.1	.3	.8
2	Noticias en T.V.	0	.3	.4	.1	.3	.1	0	0	0	0	0	.2
3	Publicidad T.V.	0	.1	.4	.4	0	0	.2	0	0	.4	.5	.3
4	Declaraciones radio	.6	.2	.3	.2	0	0	.3	.2	.2	.1	.3	.3
5	Noticias radio	.5	.4	.3	.4	.1	.4	.1	.2	.3	.1	0	.2
6	Publicidad radio	.2	.1	.2	.3	.1	0	.1	.1	.2	.1	.2	.3
7	Artículos prensa	.7	.6	.7	.2	0	.5	.5	.1	0	0	0	.2
8	Noticias prensa	.3	.4	.4	.3	.3	.3	.4	.3	.3	.3	.3	.2
9	Publicidad prensa	.2	.3	.4	.4	0	.2	0	.4	.2	.4	.3	.3
10	Posters calles	.1	.2	.8	.5	.4	0	.1	.3	.1	.2	.3	.5
11	Coches publicitarios	.4	.4	.4	.4	.4	.1	0	.3	.3	.3	.4	.4
12	Publicación libro	.7	.6	.8	.5	.6	.7	.5	0	0	.1	0	.3
13	Conferencias	.5	.7	.2	0	0	.5	.6	0	.2	.1	.4	.5
14	Mitines políticos	.3	.2	.1	.5	0	.1	0	.2	.1	.5	.4	.1
15	Reuniones de grupo	.4	.8	.1	0	0	.7	.6	0	.1	0	.4	0
16	Paseo mercados	0	.2	.4	.6	.4	0	.3	.3	.3	.3	.4	.5

Figura 14.6

Estas relaciones de causa a efecto no habían sido tenidas en cuenta por parte de los expertos consultados, caso de las casillas (10,3), (12,3) y (15,2) o las habían considerado muy débiles, como en el caso de la casilla (1,12). Se había producido un olvido y con la técnica propuesta se han conseguido recuperar unos EFECTOS OLVIDADOS.

No debe producir extrañeza alguna que se den tales olvidos cuando existen en los fenómenos que se analizan una interdependencia de causas y efectos. Y esto tiene lugar en casi todos los campos en los que el ser humano se mueve. El cerebro del hombre es capaz de poder seguir un elevado número de conexiones indirectas que pueden darse entre dos fenómenos, a través de otros colocados entre ambos. Pero sería pedirle demasiado que no dejara escapar ni uno de los hilos que entretejen las múltiples relaciones de causa a efecto que pueden darse y que en ocasiones dan lugar a un tupido velo.

Sólo a título indicativo vamos a mostrar en la figura 14.7 los caminos que puede seguir nuestro pensamiento para llegar desde la causa 1 (declaraciones T.V.) al efecto 12 (honradez) cuya relación había sido practicamente despreciada por los expertos consultados al asignarle una valuación de 0.2. Este mecanismo debería repetirse, para una relación relativamente sencilla de 16 causas con 12 efectos, unicamente... 192 veces.

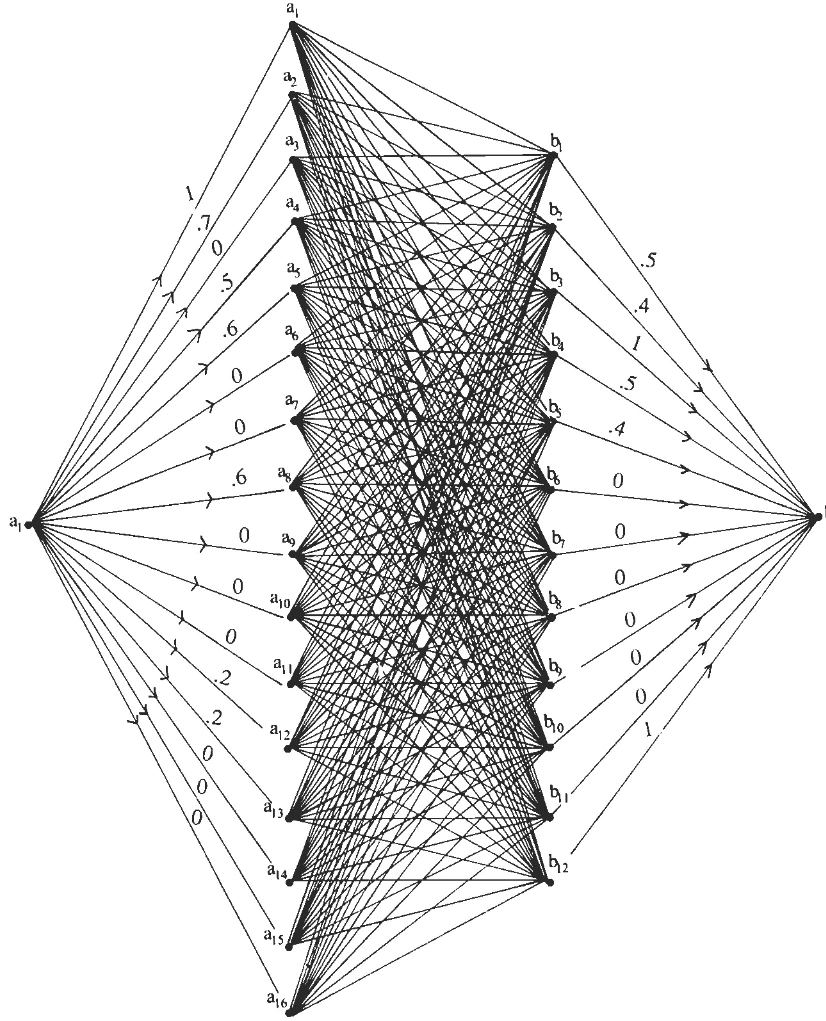

a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
a8
a9
a10
a11
a12
a13
a14
a15
a16
b1
b2
b3
b4
b5
b6
b7
b8
b9
b10
b11
b12
a1
b1
1
.7
0
.5
.6
0
0
.6
0
0
0
.2
.2
0
0
0
.5
.4
1
.5
.4
0
0
0
0
0
0
1

Figura 14.7

La figura 14.7 ha sido construída de la siguiente manera: Se ha establecido la relación de causa a efecto de a_1 (declaraciones T.V.) con cada una de las 16 "causas" de acuerdo con las valuaciones contenidas en la matriz $\underset{\sim}{A}$. (Recuérdese que en la matriz $\underset{\sim}{A}$ los conceptos que constituyen las causas coinciden con los que representan los efectos. Lo mismo sucede con la matriz $\underset{\sim}{B}$.

A partir de cada punto a_j, $j = 1, 2, \ldots, 16$, al que llega una flecha cuyo origen es a_1, se trazan unas nuevas flechas cuyo punto de destino es b_k, $k = 1, 2, \ldots 12$. Finalmente se une de nuevo mediante una flecha cada b_k, $k = 1, 2, \ldots, 12$ con un punto final b_{12}.

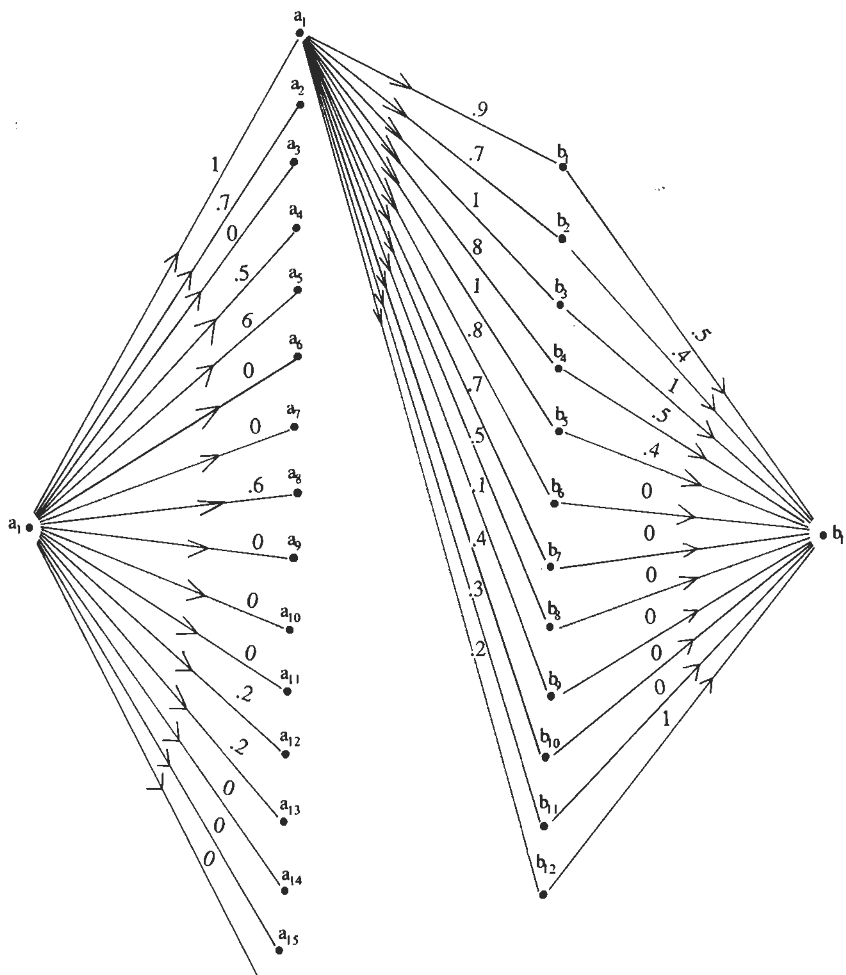
Con objeto de que resulte lo más claro posible este proceso, vamos a representar mediante la figura 14.8 una parte del mismo, en la que se podrá observar la incidencia de a_1 sobre b_{12} a partir de la incidencia de a_1 consigo mismo y de a_1 sobre $b_1, b_2, \ldots b_{12}$ y de cada una de las b_k, $k = 1, 2, \ldots, 12$ sobre b_{12}.

Así, dado que la incidencia de a_1 (declaraciones en T.V.) sobre a_1 (declaraciones en T.V.) es 1, la incidencia de a_1 (declaraciones en T.V.) sobre b_1 (buena imagen) es 0.9 y la incidencia de b_1 (buena imagen) sobre b_{12} (honradez) es 0.5 se tendrá una incidencia acumulada por <u>este camino</u> de $1 \wedge 0.9 \wedge 0.5 = 0.5$. Si se utiliza un segundo camino se tendrá que la incidencia de a_1 (declaraciones T.V.) sobre a_1 (declaraciones T.V.) es 1, la incidencia de a_1 (declaraciones T.V.) sobre b_2 (simpatía popular) es 0.7 y la incidencia de b_2 (simpatía popular) sobre b_{12} (honradez) es 0.4 se tendrá <u>por este segundo camino</u> una incidencia acumulada de $1 \wedge 0.7 \wedge 0.4 = 0.4$

De continuar con este proceso se llegaría a una primera conclusión. Si "sólo" se considera la incidencia de a_1 sobre sí misma, sin tener en cuenta la que a_1 tiene sobre las demás "causas" $a_2, a_3, \ldots, a_{12}$, el efecto acumulado de a_1 sobre a_{12} sería 0.5 ya que:

(14.5)
$$\bigvee_k (a_1 \wedge a_1 \wedge b_k \wedge b_{12}) = 0.5$$

cuando $k = 1, 2 \ldots, 12$



a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
a8
a9
a10
a11
a12
a13
a14
a15
a16
1
.7
0
.5
6
0
0
.6
0
0
0
.2
.2
0
0
0
.9
.7
1
8
1
.8
.7
.5
.1
.4
.3
.2
b1
b2
b3
b4
b5
b6
b7
b8
b9
b10
b11
b12
.5
.4
1
.5
.4
0
0
0
0
0
0
1

Figura 14.8

Y así se podría seguir al considerar explícitamente las relaciones de incidencia de cada a_j con todas las b_k y de éstas con a_{12}.

Pero veamos el proceso de diferente manera ya que plasmará más fácilmente los mecanismos que informan nuestro esquema. En lugar de establecer las incidencias de a_1 consigo mismo y luego con cada una de las b_k, k= 1, 2, ..., 12, relacionemos en primer lugar a_1 con todas las a_j, j = 1, 2, ..., 16 para posteriormente establecer la incidencia de cada a_j, j=1,2,..., 16 primero con b_1 y b_1 con b_{12} (como se ha hecho en la figura 14.9), luego con b_2 y b_2 con b_{12}, después con b_3 y b_3 con b_{12} (como aparece en la figura 14.10), etc...

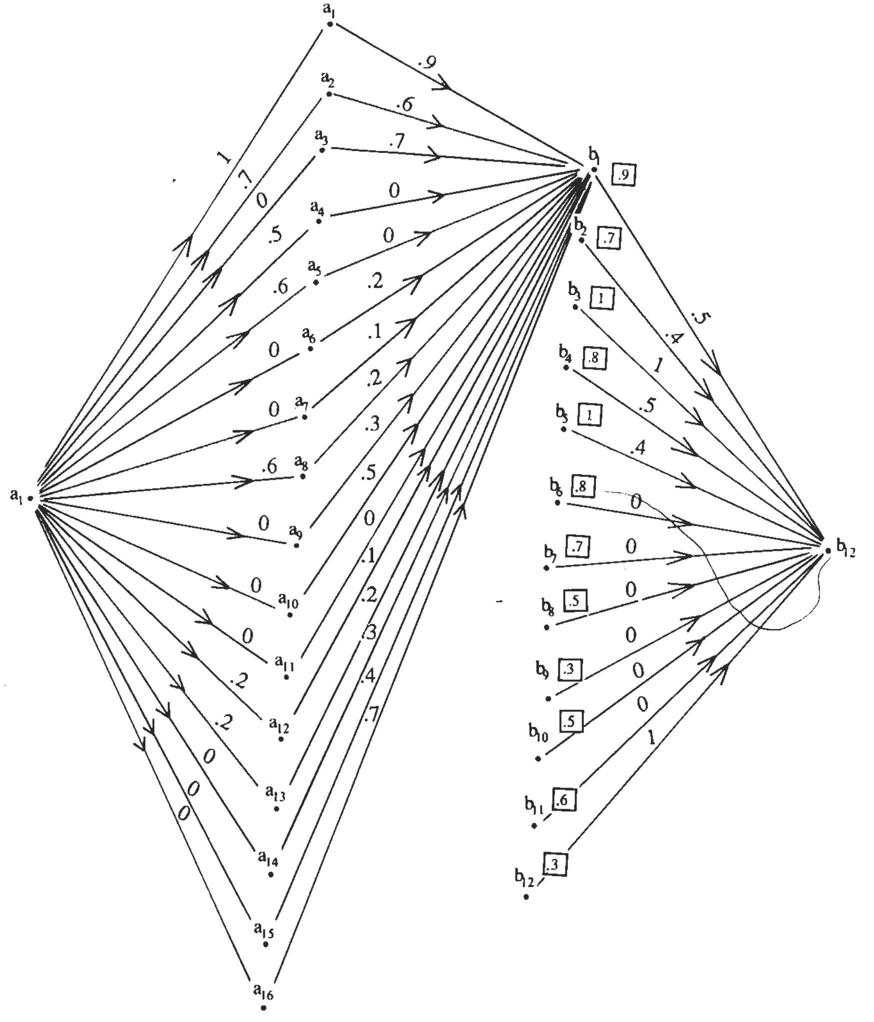


Figura 14.9

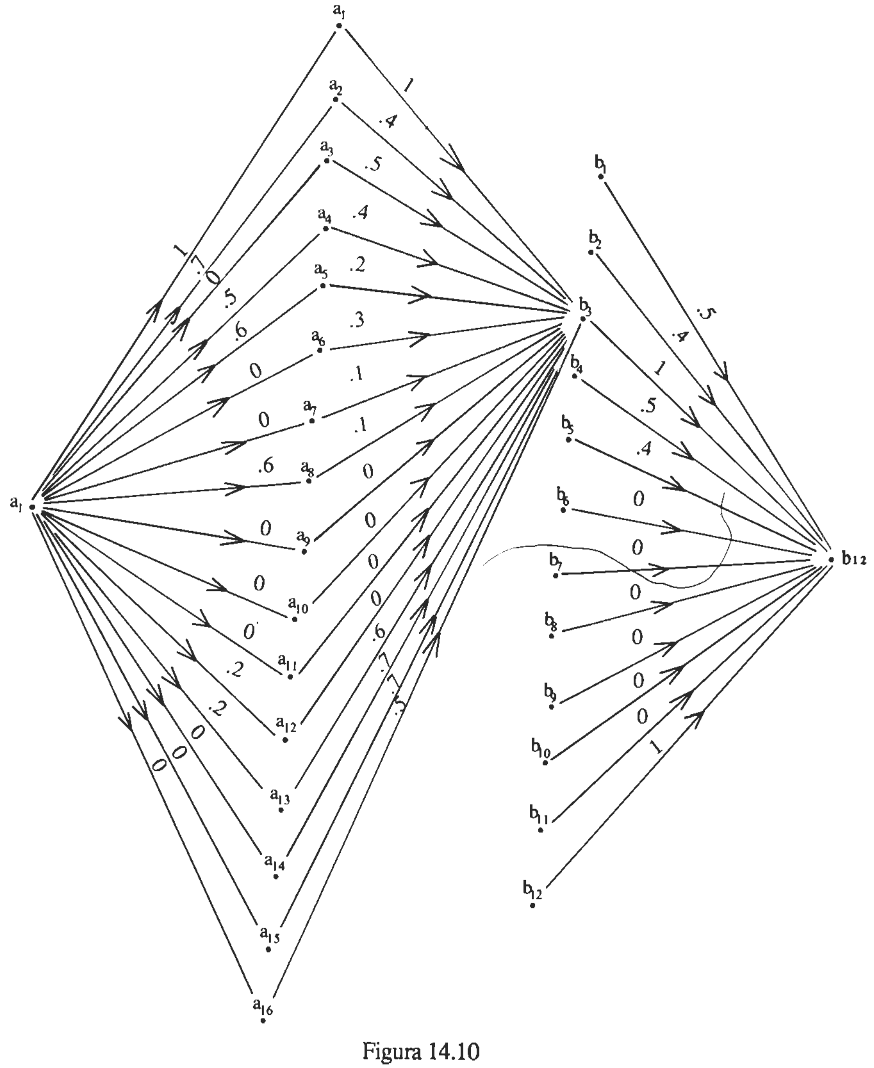

a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
a8
a9
a10
a11
a12
a13
a14
a15
a16
b1
b2
b3
b4
b5
b6
b7
b8
b9
b10
b11
b12

Figura 14.10

Con objeto de hallar el camino de a_1 a b_{12} que proporciona el maxmin se puede buscar sucesivamente el camino más importante desde a_1 hasta b_1 (figura 14.9), desde a_1 hasta b_2, desde a_1 hasta b_3 (figura 14.10)..., desde a_1 hasta b_{12}. Para ello se van a realizar las siguientes comparaciones:

	$a_1 \rightarrow b_1$	$a_1 \rightarrow b_2$	$a_1 \rightarrow b_3$
	$1 \wedge .9 = .9 \leftarrow$	$1 \wedge .7 = .7 \leftarrow$	$1 \wedge 1 = 1 \leftarrow$
	$.7 \wedge .6 = .6$	$.7 \wedge .6 = .6$	$.7 \wedge .4 = .4$
	$0 \wedge .7 = 0$	$0 \wedge .9 = 0$	$0 \wedge .5 = 0$
	$.5 \wedge 0 = 0$	$.5 \wedge .3 = .3$	$.5 \wedge .4 = .4$
	$.6 \wedge 0 = 0$	$.6 \wedge .1 = .1$	$.6 \wedge .2 = .2$
	$0 \wedge .2 = 0$	$0 \wedge .4 = 0$	$0 \wedge .3 = 0$
(14.6)	$0 \wedge .1 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge .1 = 0$
(14.7)	$.6 \wedge .2 = .2$	$.6 \wedge .1 = .1$	$.6 \wedge .1 = .1$
	$0 \wedge .3 = 0$	$0 \wedge .2 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
(14.8)	$0 \wedge .5 = 0$	$0 \wedge .6 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
	$.2 \wedge .1 = .1$	$.2 \wedge .1 = .1$	$.2 \wedge 0 = 0$
	$.2 \wedge .2 = .2$	$.2 \wedge 0 = 0$	$.2 \wedge .6 = .2$
	$0 \wedge .3 = 0$	$0 \wedge .6 = 0$	$0 \wedge .7 = 0$
	$0 \wedge .4 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge .7 = 0$
	$0 \wedge .7 = 0$	$0 \wedge .8 = 0$	$0 \wedge .5 = 0$
	se obtiene 0.9	se obtiene 0.7	se obtiene 1

y así sucesivamente se hallaría 0.8 para $a_1 \rightarrow b_4$, 1 para $a_1 \rightarrow b_5$, 0.8 par $a_1 \rightarrow b_6$, 0.7 para $a_1 \rightarrow b_7$, 0.5 para $a_1 \rightarrow b_8$, 0.3 para $a_1 \rightarrow b_9$, 0.5 para $a_1 \rightarrow b_{10}$, 0.6 para $a_1 \rightarrow b_{11}$, y 0.3 para $a_1 \rightarrow b_{12}$.

Continuando los cálculos desde $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ hasta b_{12} se obtendrá:

$$
\begin{array}{ll}
 & .9 \wedge .5 = .5 \\
 & .7 \wedge .4 = .4 \\
 & 1 \wedge 1 = 1 \leftarrow \\
 & .8 \wedge .5 = .5 \\
 & 1 \wedge .4 = .4 \\
(14.9) & .8 \wedge 0 = 0 \\
 & .7 \wedge 0 = 0 \\
 & .5 \wedge 0 = 0 \\
 & .3 \wedge 0 = 0 \\
 & .5 \wedge 0 = 0 \\
 & .6 \wedge 0 = 0 \\
 & .3 \wedge 1 = .3
\end{array}
$$

Si utilizamos el conocido procedimiento de la programación dinámica, pasando de la situación final a la inicial, se encontrará el camino óptimo que es:

$$a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_3 \rightarrow b_{12}$$

En la figura 14.10 puede observarse este camino en el grafo.

Si se utiliza el cálculo matricial como alternativa de la representación mediante grafos, la figura 14.7 sería sustituída por las expresiones (14.11) y (14.12)

En ellas se puede observar que el camino viene señalado por las flechas, las cuales ponen de manifiesto la causa que actúa como intermediaria.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_1	1	.7	0	.5	.6	0	0	.6	0	0	0	.2	.2	0	0	0

∘

.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.1	.4	.3	.2
.6	.6	.4	.5	.2	.8	.9	.5	.3	.5	.6	.3
.7	.9	.5	.3	.7	1	.8	.6	.3	.2	.1	.2
0	.3	.4	.5	.7	.5	.2	.3	.1	.4	.2	.2
0	.1	.2	.1	.4	0	.3	.2	0	.3	.5	.2
.2	.4	.3	0	.3	.5	.4	.1	0	.1	.1	.1
.1	0	.1	.6	.7	0	0	.8	.6	1	.9	.3
.2	.1	.1	.2	.2	.1	0	.1	0	.1	.2	.2
.3	.2	0	0	.4	.3	.5	0	0	0	.1	.1
.5	.6	0	0	0	.8	.7	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	.2	.3	0	0	0	0	0
.1	.1	0	.4	.1	0	.2	.9	.8	.7	1	.4
.2	0	.6	.8	.7	.1	0	.8	.5	.6	.4	.1
.3	.6	.7	.4	.9	.7	.8	.3	.2	0	.2	.6
.4	0	.7	.8	.7	0	0	.7	.2	.6	.4	.8
.7	.8	.5	0	0	1	.7	0	0	0	0	0

(14.11)

=

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
$= a_1$	.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.3	.5	.6	.3

,

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
a_1	.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.3	.5	.6	.3

∘

.5
.4
1
.5
.4
0
0
0
0
0
0
1

$=1$

(14.12)

La técnica propuesta para la recuperación de efectos olvidados, en un campo de la actividad política como es la preparación y ejecución de un proceso electoral, adquiere un especial interés como consecuencia de la necesidad de asignar los recursos financieros disponibles (que siempre serán limitados) en aquellas acciones que darán lugar a una mayor incidencia acumulada en los aspectos que se desean destacar del candidato o grupo de candidatos propuestos.

Pero es que, además, al poder descubrir el camino por el que se llega al grado de incidencia de una "causa" sobre un "efecto" proporciona una valiosa información que puede ser utilizada para modificar o ratificar las valuaciones establecidas en la matriz de incidencias directas.

Finalmente, al deslindar los efectos de segunda generación, surgen, ante los propios expertos en preparación de las campañas, determinadas relaciones de causa-efecto, que pueden llevarles a modificar la apreciación que tienen de la respuesta del electorado a los estímulos propuestos.

15.- Los efectos olvidados en el ámbito financiero

De todos es conocida la relación existente entre la dimensión de las masas patrimoniales del balance de las empresas y la apreciación que de ellas tienen los agentes financieros tales como bancos, cajas de ahorros, proveedores, inversores, etc... La utilización de los ratios, sean éstos de situación, de gestión, de rentabilidad o bursátiles, para conocer el grado de estabilidad económica o el equilibrio financiero, son una muestra evidente del interés que tiene el conseguir, en este caso a través de cocientes, las relaciones entre las diversas partes de que constan las estructuras económica y financiera del balance.

El resultado de estos cocientes son unos índices que permiten, mediante su comparación a través del tiempo, con otras empresas, o con estandares ideales, determinar la salud económico-financiera de las empresas. Estos datos son utilizados por los diversos agentes para decidir sobre el grado de colaboración o vinculación que resulta más deseable.

Ahora bien, en las relaciones de una empresa con el medio exterior no solamente influyen los datos del pasado sino que, de manera fundamental, también la estimación de las situaciones futuras (1). Pero en un contexto económico caracterizado por la incertidumbre resulta muy difícil, en la mayor parte de los casos, establecer, con certeza y ni siquiera en términos de probabilidad, los datos del futuro como una proyección de los del pasado.

Por otra parte las decisiones de los agentes financieros no tienen como base exclusiva los rígidos números que provienen de unas operaciones aritméticas, sino

(1) Véase para este aspecto del tema KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J: Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela, 1986. Cap. 8.

que intervienen, a veces de manera decisiva, las apreciaciones de los ejecutivos con un inevitable componente de subjetividad.

Estas apreciaciones están basadas implícita o explícitamente en unas relaciones de causa a efecto entre la representación contable de la empresa y la imagen de ésta frente al mundo exterior.

Entre las varias posibilidades de agrupar los distintos elementos que componen las estructuras económica y financiera del balance en masas patrimoniales vamos a considerar las siguientes:

1.- Resultados
2.- Disponible
3.- Realizable cierto
4.- Realizable condicionado
5.- Inmovilizado financiero
6.- Inmovilizado material (excepto equipos)
7.- Equipos industriales
8.- Inmovilizado inmaterial
9.- Deudas a corto plazo
10.- Deudas a medio y largo plazo
11.- Capital Social
12.- Reservas
13.- Provisiones
14.- Fondo de amortización

Como puede observarse se ha realizado una separación en el inmovilizado para distinguir entre la incidencia de los equipos y la de los otros elementos entre los que destacan los inmuebles.

Cuando se pretende concretar en decisiones la imagen financiera de la empresa, hay que recurrir a la voluntad de los agentes internos o externos para su participación en la empresa a través de créditos, aportaciones y cualquier tipo de actuaciones que afecten a las magnitudes económico-financieras. En este caso jugarán el papel de "efectos". Se considerarán a título de ejemplo las siguientes:

1.- Crédito de proveedores
2.- Descuento de efectos
3.- Créditos de funcionamiento
4.- Crédito a medio y largo plazo
5.- Crédito hipotecario
6.- Aumento de capital
7.- Aumento de reservas
8.- Aumento en la cotización de acciones

9.- Solvencia de la sociedad
10.- Valor de la empresa
11.- Grado de liquidez de la empresa
12.- Exigibilidad de la empresa

A partir de estos elementos se puede construir una matriz de incidencias cualitativas que relacione cada una de las causas con cada uno de los efectos. En este caso, como en muchos otros, resulta muy difícil que los expertos quieran asignar a cada par (a_j, b_k) que define una relación mediante una valuación en [0,1], por lo que se les ha solicitado que suministren intervalos de confianza, también en [0,1]. Así, para un par que represente la incidencia de los "equipos industriales" existentes en una empresa sobre la "solvencia de la sociedad" va a ser expresada mediante el intervalo de confianza [0.4, 0.7].

Puede suceder, sin embargo, que la opinión que se dé para una relación venga dada por una valuación tal como 0.8, como es el caso de la incidencia de los "beneficios" sobre los "créditos de funcionamiento". Como es sobradamente conocido, un número puede ser considerado también como un intervalo de confianza, que sería en esta ocasión [0.8, 0.8].

Presentamos en la figura 15.1 mediante una matriz Φ- borrosa los resultados de la opinión expresada por los expertos. En ella se puede observar que, para determinadas relaciones, los expertos pusieron de manifiesto su opinión mediante una cifra mientras que en otras lo hicieron a través de un intervalo de confianza.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}$	Créditos de proveedores	Descuento efectos	Créditos de funcionamiento	Créditos a medio y largo plazo	Crédito Hipotecario	Aumento de capital	Aumento de reservas	Aumento en la cotización de acciones	Solvencia de la sociedad	Valor de la empresa	Grado de liquidez de la empresa	Exigibilidad de la empresa
1	Resultados	[.2,3]	[.4,.6]	.8	[.5,.7]	[.1,.3]	1	1	[.6,.8]	[.6,.9]	[.7,.9]	[.1,.2]	0
2	Disponible	[.7,.8]	1	1	[.4,.6]	[.2,.5]	0	[.3,.6]	[.2,.3]	[.5,.7]	[.4,.6]	1	0
3	Realizable cierto	0	1	[.7,.8]	[.4,.5]	[.1,.2]	.2	0	[.1,.2]	.1	[.3,.4]	[.8,.9]	0
4	Realizable condicionado	1	[.8,.9]	[.8,.9]	[.7,.8]	[0,.1]	[.2,.4]	0	0	[.5,.8]	[.2,.3]	[.6,.8]	0
5	Inmovilizado financiero	[.1.3]	0	[.1,.2]	.6	.3	.2	0	0	[.4,.5]	[.4,.5]	[.4,.5]	0
6	Inmov. material (excep. equip.)	0	[.1,.4]	0	[.6,.8]	1	[.8,.9]	0	[.4,.5]	.8	[.6,.9]	.1	0
7	Equipos industriales	0	[.4,.7]	0	1	[.1,.3]	[.6,.8]	0	0	[.4,.7]	[.3,.6]	[.2,.4]	0
8	Inmovilizado inmaterial	0	0	0	0	0	[.1,.4]	0	[.3,.5]	[.4,.5]	[.7,.8]	0	0
9	Deudas a corto plazo	[0,.4]	.9	[.7,.9]	[.7,.8]	0	.1	[.2,.4]	0	[.7,.8]	[.2,.5]	0	1
10	Deudas a medio y largo plazo	[.2,.5]	[.6,.8]	[.7,.9]	1	[.8,.9]	[.7,.9]	[.6,.9]	0	1	[.6,.9]	0	[.8,.9]
11	Capital Social	[.6,.8]	[.3,.4]	[.3,.4]	[.6,.8]	0	[.7,.8]	0	0	1	[.7,.9]	0	0
12	Reservas	[.6,.8]	[.3,.4]	[.3,.4]	[.6,.8]	0	[.2,.4]	[.4,.6]	[.4,.5]	1	[.7,.9]	0	0
13	Provisiones	[.4,.5]	0	[.1,.4]	[.2,.4]	0	0	[.4,.5]	[.1,.4]	[.4,.6]	[.3,.4]	0	0
14	Fondos de amortización	0	0	0	0	[.4,.5]	[.3,.6]	0	[.2,.3]	.5	[.4,.6]	0	0

Figura 15.1

Mediante esta matriz se han puesto de manifiesto las relaciones directas de causa a efecto entre la magnitud (o en su caso la variación) de las masas patrimoniales de un balance y la imagen externa de la empresa reflejada a través de sus posibilidades financieras.

Sin embargo esta matriz Φ-borrosa sólo tiene en cuenta las incidencias de primer orden, es decir aquellas que se captan o intuyen de manera inmediata. Pero es que existen, además, unas incidencias que tienen lugar a través de los demás conceptos que juegan en estas relaciones, de tal manera que se produce una ''acumulación'' de efectos debido a que una ''causa'' primaria provoca un efecto en otro de los elementos que se han considerado como una causa, lo que puede añadir fuerza al efecto final.

Con objeto de establecer este tipo de incidencias de una ''causa'' con todas las demás, se ha solicitado al mismo grupo de expertos que diera su opinión a través de una nueva matriz Φ-borrosa.

Hemos podido observar que en aquellas relaciones donde la discrepancia era mayor se resolvían las diferencias de criterio suministrando un intervalo de confianza más amplio. Así sucedió con la incidencia del ''fondo de amortización'' sobre las ''deudas a medio y largo plazo'' por ejemplo a la que se asignó el intervalo [.3, .7]. Por el contrario en muchas ocasiones la coincidencia de criterios daba lugar a intervalos cuyos extremos eran muy próximos e incluso se confundían en un solo número. En otro caso, se coincidía en que la incertidumbre exigía un intervalo de confianza amplio como era el caso de la incidencia de los ''equipos industriales'' sobre el ''inmovilizado material (excepto equipos)'' para la cual se asignó también [.3, .7].

El resultado queda expresado en la figura 15.2.

De la misma manera se establecen las relaciones existentes entre cada elemento considerado originariamente como un ''efecto'' con los demás, obteniendo con ello una nueva matriz cuadrada de 12x12. Así, los expertos proporcionarán las incidencias del ''crédito de los proveedores'' sobre el ''descuento de efectos'', sobre los ''créditos de funcionamiento'', etc. Las posibilidades de expresar estas relaciones a través de intervalos de confianza, hace más cómoda la actuación de los expertos, aunque deba evitarse la formulación de valuaciones mediante intervalos de confianza demasiados amplios (gran separación entre los extremos) si no es estrictamente necesario.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		Resultados	Disponible	Realizable cierto	Realizable condicionado	Inmovilizado financiero	Inmov. material (excep. equip.)	Equipos industriales	Inmovilizado inmaterial	Deudas a corto plazo	Deudas a medio y largo plazo	Capital Social	Reservas	Provisiones	Fondos de amortización
1	Resultados	1	[.1,.3]	[.2,.5]	[.1,.2]	.5	[.2,.3]	[.4,.5]	0	[.6,.8]	[.2,.5]	0	1	1	[.6,.9]
2	Disponible	[.1,.2]	1	[.6,.7]	[.5,.7]	.8	[.1,.4]	[.1,.3]	0	[.7,.8]	.1	0	0	0	0
3	Realizable cierto	0	[.6,.9]	1	0	0	0	0	0	.9	.1	0	0	0	0
4	Realizable condicionado	[.1,.4]	.9	.9	1	[.2,.4]	.1	0	0	1	[.4,.7]	0	0	[.2,.4]	0
5	Inmovilizado financiero	.8	[.2,.6]	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	[.4,.6]	.6
6	Inmov. material (excep. equip.)	0	.1	0	[.2,.4]	0	1	0	0	[.2,.3]	.9	[.7,.8]	.3	[.6,.8]	1
7	Equipos industriales	[.8.1]	[.3,.5]	[.7,.9]	[.7,.9]	0	[.3,.7]	1	0	.2	[.8,.9]	[.6,.8]	[.5,.8]	[.6,.7]	1
8	Inmovilizado inmaterial	[.3,.6]	.1	0	0	0	0	0	1	0	.1	0	.2	[.2,.4]	1
9	Deudas a corto plazo	.1	[.8,.9]	[.1,.2]	.8	[0,.1]	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	Deudas a medio y largo plazo	[.3,.4]	[.4,.6]	0	[.3,.4]	.7	[.4,.6]	[.2,.4]	0	[.1,.4]	1	[.7,.9]	.8	0	0
11	Capital Social	[.7,.9]	[.5,.6]	.1	[.2,.3]	.5	[.7,.9]	[.6,.8]	.9	.1	[.7,.9]	1	[.6,.7]	0	0
12	Reservas	[.7,.9]	[.5,.6]	.1	[.2,.3]	[.7,.8]	[.7,.9]	.1	0	.1	[.7,.9]	.8	1	0	0
13	Provisiones	1	[.5,.6]	0	0	0	[.7,.9]	[.7,.9]	0	0	0	0	0	1	0
14	Fondos de amortización	1	0	0	0	0	[.3,.4]	[.5,.7]	0	0	[.3,.7]	0	0	[.2,.4]	1

Figura 15.2

El resultado es una nueva matriz Φ-borrosa que presentamos en la figura 15.3.

Hay que tener en cuenta que la valuación que los expertos proporcionan de estas relaciones tiene una elevada dependencia de la política económica de cada empresa para la consecución de sus objetivos así como de la prioridad que se dé a unos sobre los otros. Así pues la valuación será distinta, en determinadas relaciones, según se pretenda una rentabilidad económica a corto o a largo plazo, o bien se busque de manera prioritaria una estabilidad financiera relegando a un segundo término la obtención de beneficios inmediatos.

En efecto la incidencia de un aumento en el ''grado de liquidez'' sobre el ''aumento de las reservas'', por ejemplo, se estimará de manera diferente si la empresa desea distribuir una parte importante de los beneficios obtenidos o retenerlos como reservas. La influencia que las variaciones en la exigibilidad de la empresa tiene sobre la decisión de aumentar el Capital, depende también de los objetivos de la empresa y de la política que se adopte para conseguirlos.

Así, pues, incluso dentro de la subjetividad inherente al estudio de la incertidumbre hay que considerar en este caso las diferencias que se producirían en las valuaciones realizadas por los mismos expertos de una empresa a otra y de una situación económica a otra distinta. Este es un hecho que es necesario considerar cuando se estudian las valuaciones que aparecen en estas matrices.

	$\underset{\sim}{B}$	1 Créditos de proveedores	2 Descuento efectos	3 Otros Créditos de funcionamiento	4 Créditos a medio y largo plazo	5 Crédito Hipotecario	6 Aumento de capital	7 Aumento de reservas	8 Aumento en la cotización de acciones	9 Solvencia de la sociedad	10 Valor de la empresa	11 Grado de liquidez de la empresa	12 Exigibilidad de la empresa
1	Crédito de proveedores	1	[.4,.6]	[.5,.6]	0	0	0	0	0	[.2,.5]	.7	0	.9
2	Descuento efectos	[.6,.8]	1	[.1,.2]	.1	0	[.2,.3]	0	0	[.2,.5]	.7	0	.9
3	Otros créditos de Funcionamiento	[.2,.5]	0	1	0	0	0	0	0	[.2,.5]	[.2,.3]	0	.9
4	Créditos medio y largo plazo	0	[.5,.7]	[.5,.7]	1	0	[.6,.8]	.7	0	[.4,.6]	[.5,.8]	0	[.6,.7]
5	Créditos hipotecarios	0	0	0	[.1,.3]	1	[.6,.8]	.7	0	[.4,.6]	[.5,.8]	0	[.3,.6]
6	Aumento Capital	.8	[.7,.8]	[.4,.6]	[.5,.8]	0	1	0	1	1	1	0	0
7	Aumento reservas	[.6,.8]	[.6,.7]	[.6,.7]	[.7,.8]	0	[.2,.4]	1	.9	.8	[.8,.9]	.2	0
8	Aumento cotizaciones	0	0	0	0	0	0	0	1	[.2,.4]	.5	0	0
9	Solvencia sociedad	.9	[.7,.9]	.9	.9	[.3,.5]	1	0	[.7.8]	1	[.6,.9]	0	0
10	Valor de la empresa	[.2,.4]	[.2,.4]	[.2,.4]	.1	[.5,.6]	[.1,.2]	0	[.8,.9]	.2	1	0	0
11	Grado liquidez empresa	.9	[.8,.9]	.9	[.7,.8]	[.2,.4]	[.5,.6]	[.7,.9]	[.4,.6]	[.9,1]	[.6,.7]	1	0
12	Exigibilidad empresa	[.8,.9]	[.7,.8]	.9	.9	[.6,.8]	[.7,.8]	[.5,.7]	[.2,.5]	[.8,.9]	[.5,.7]	.3	1

Figura 15.3

Una vez se dispone de las informaciones contenidas en estas matrices Φ - borrosas, debe procederse a la obtención por convolución maxmin de una nueva matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ en la que se recogerán los efectos acumulados de cada una de las masas patrimoniales sobre sí mismas y sobre las demás así como de éstas sobre los elementos que representan la imagen financiera de las empresas.

Si, a título de ejemplo, se considera la incidencia del "realizable condicionado" sobre el "crédito hipotecario" se observará que de manera directa su efecto es muy reducido dado que por el hecho de aumentar los stocks de productos terminados, pongamos por caso, no implica unas mayores posibilidades de obtener créditos hipotecarios (los expertos asignaron a esta relación un intervalo de confianza [0, .1]. Ahora bien en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ aparece, en la correspondiente casilla el intervalo [.4, .7], que ha sido obtenido a través del siguiente camino:

$$\boxed{\text{realizable condicionado}} \xrightarrow{[.4,.7]} \boxed{\text{deudas a medio y largo plazo}} \xrightarrow{[.8,.9]} \boxed{\text{crédito hipotecario}}$$

En él se puede observar que existe una cierta influencia del realizable condicionado sobre las deudas a medio y largo plazo. En efecto la adquisición de materias primas y productos semi-elaborados no siempre se realiza con pagos a corto plazo, sino que a veces se recurre al crédito a plazo más largo. Pero cuando se tienen elevadas deudas a medio y largo plazo puede motivar que se tenga que recurrir a créditos hipotecarios. Los expertos han considerado que esta relación de causa a efecto es intensa [.8, .9]. A nuestro entender creemos que son otros los motivos que pesan de manera efectiva para el aumento de los créditos hipotecarios, como es la adquisición de inmuebles, incluidos contablemente en el "inmovilizado material (excepto equipos)", aunque no dudamos de la explicación suministrada y sobre todo la respetamos íntegramente.

Los intervalos de confianza obtenidos en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ por convolución maxmin de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ y la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ no siempre se corresponden con uno de los intervalos de una de las matrices convolucionadas sino que, en determinados casos, se toma un extremo de una casilla y el otro de una distinta. En efecto si se observa la casilla (8,9) de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ se puede constatar que el resultado es el intervalo [.5, .6], sin que éste aparezca ni en la fila 8 de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ ni en la columna 9 de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$. Este intervalo es el resultado de considerar como extremo inferior, el correspondiente a la casilla (14,9) de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ y el extremo superior, el correspondiente a la casilla (8,1) de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$. Gráficamente esta relación acumulada puede representarse de la siguiente manera:

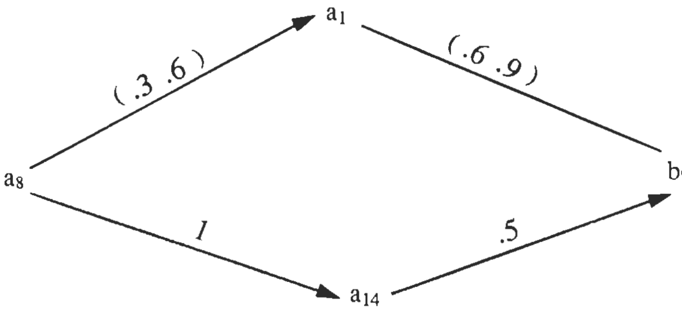


Figura 15.4

El efecto acumulado por el camino $a_8 \rightarrow a_1 \rightarrow b_9$ es [.3, .6] mientras que el correspondiente al camino $a_8 \rightarrow a_{14} \rightarrow b_9$ es [.5, .5] por lo que el máximo de estos dos intervalos es el [.5, .6].

Este resultado tiene una significación intuitiva elemental, si se entienden como extremos del intervalo de confianza las valuaciones por debajo y por encima de las cuales no puede darse la relación considerada. Así en nuestro ejemplo la incidencia del ''inmovilizado inmaterial'' sobre los ''resultados'' no es menor de 0.3 y como la incidencia de los ''resultados'' sobre la ''solvencia'' tampoco es menor que 0.6, la incidencia del ''inmovilizado inmaterial'' sobre la ''solvencia de la sociedad'' a través de los ''resultados'' no será menor de 0.3. Ahora bien, se tiene también que la incidencia del ''inmovilizado inmaterial'' sobre el ''fondo de amortización'' no es menor que 1 y la del ''fondo de amortización'' sobre la ''solvencia de la sociedad'' no es inferior de 0.5, por lo que la incidencia del ''inmovilizado inmaterial'' sobre la ''solvencia de la sociedad'' a través del ''fondo de amortización'' no es inferior a 0.5. Se considerará así, esta valuación de 0.5 como extremo inferior del intervalo de la casilla (8,9) en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$. El mismo razonamiento se haría para el extremo superior para el que se escogería la valuación 0.6. Queda pues formado el intervalo [0.5, 0.6].

Otra de las casillas en la que el intervalo de confianza de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ se halla formado por extremos pertenecientes a dos caminos distintos es la (5,1) en la que el extremo inferior corresponde a la relación $a_5 \rightarrow a_{13} \rightarrow b_1$ con una valuación de 0.4, mientras que el extremo superior corresponde a la relación $a_5 \rightarrow a_2 \rightarrow b_1$ con una valuación de 0.6. En la figura 15.5 se ponen de manifiesto todos los posibles caminos que conducen desde a_5 hasta b_1.

Por otra parte se puede observar que en esta fase de estimación de los efectos acumulados de primera y segunda generación, aparecen aún dos relaciones, la (5, 12) incidencia del "inmovilizado financiero" sobre la "exigibilidad de la empresa" y la (13, 12) incidencia de las "provisiones" también sobre la "exigibilidad de la empresa" en las que no existe incidencia alguna, ni directa ni a través de la que podría aparecer como consecuencia del efecto de las masas patrimoniales consigo mismas. Es por ello que en estas casillas de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ aparece el intervalo [0, 0]=0.

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$	1 Créditos de proveedores	2 Descuento efectos	3 Otros Créditos de funcionamiento	4 Créditos a medio y largo plazo	5 Créditos Hipotecarios	6 Aumento de capital	7 Aumento de reservas	8 Aumento en la cotización de acciones	9 Solvencia de la sociedad	10 Valor de la empresa	11 Grado de liquidez de la empresa	12 Exigibilidad de la empresa
1	Resultados	[.6,.8]	[.6,.8]	.8	[.6,.8]	[.4,.5]	1	1	[.6,.8]	1	[.7,.9]	[.4,.5]	[.6,.8]
2	Disponible	[.7,.8]	1	1	[.7,.8]	[.3,.5]	[.2,.4]	[.3,.6]	[.2,.4]	[.7,.8]	[.4,.6]	1	[.7,.8]
3	Realizable cierto	[.6,.8]	1	[.7,.9]	[.7,.8]	[.2,.5]	.2	[.3,.6]	[.2,.3]	[.7,.8]	[.4,.6]	[.8,.9]	.9
4	Realizable condicionado	1	.9	.9	[.7,.8]	[.4,.7]	[.4,.7]	[.4,.7]	[.2,.4]	[.7,.8]	[.4,.7]	.9	1
5	Inmovilizado financiero	[.4,.6]	[.4,.6]	.8	[.6,.7]	[.4,.5]	.8	.8	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.8]	[.4,.6]	0
6	Inmov. material (excep. equip.)	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.9]	.9	1	[.8,.9]	[.6,.9]	[.4,.5]	.9	[.7,.9]	[.2,.4]	[.8,.9]
7	Equipos industriales	[.7,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]	1	[.8,.9]	[.8,.1]	[.8,.1]	[.6,.8]	[.8,.1]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]
8	Inmovilizado inmaterial	[.2,.4]	[.3,.6]	[.3,.6]	[.3,.6]	[.4,.5]	[.3,.6]	[.3,.6]	[.3,.6]	[.5,.6]	[.7,.8]	[.1,.2]	.1
9	Deudas a corto plazo	.8	.9	[.8,.9]	[.7,.8]	[.2,.5]	[.2,.4]	[.3,.6]	[.2,.3]	[.7,.8]	[.4,.6]	[.8,.9]	1
10	Deudas a medio y largo plazo	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.9]	1	[.8,.9]	[.7,.9]	[.6,.9]	[.4,.5]	1	[.7,.9]	[.4,.6]	[.8,.9]
11	Capital Social	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.6,.8]	1	[.7,.9]	[.5,.6]	[.7,.9]
12	Reservas	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.6,.8]	1	[.7,.9]	[.5,.6]	[.7,.9]
13	Provisiones	[.5,.6]	[.5,.7]	.8	[.7,.9]	[.7,.9]	1	1	[.6,.8]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.5,.6]	0
14	Fondos de amortitzación	[.2,.5]	[.4,.7]	.8	[.5,.7]	[.4,.7]	1	1	[.6,.8]	[.6,.9]	[.7,.9]	[.2,.4]	[.3,.7]

Figura 15.6

Realizadas estas reflexiones y una vez obtenida la matriz $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ (figura 15.6) vamos a pasar a estimar, por convolución maxmin, una nueva matriz $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$ en la que aparecerán, en forma de intervalos de confianza, las incidencias acumuladas de primera y segunda generación.

	$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$	1 Créditos de proveedores	2 Descuento efectos	3 **Otros Créditos de funcionamiento**	4 Créditos a medio y largo plazo	5 **Créditos Hipotecarios**	6 Aumento de capital	7 Aumento de reservas	8 Aumento en la cotización de acciones	9 Solvencia de la sociedad	10 Valor de la empresa	11 Grado de liquidez de la empresa	12 Exigibilidad de la empresa
1	Resultados	.9	[.7,.9]	.9	.9	[.6,.8]	1	1	1	1	1	[.4,.5]	.8
2	Disponible	.9	1	1	[.7,.8]	[.6,.8]	[.7,.8]	[.7,.9]	[.7,.8]	[.9,1]	[.7,.8]	1	.9
3	Realizable cierto	[.8,.9]	1	.9	.9	[.6,.8]	[.7,.8]	[.7,.9]	[.7,.8]	[.8,.9]	[.7,.8]	[.8,.9]	.9
4	Realizable condicionado	1	.9	.9	.9	[.6,.8]	[.7,.8]	[.7,.9]	[.7,.8]	.9	[.7,.8]	.9	1
5	Inmovilizado financiero	.8	[.7,.8]	.8	[.7,.8]	[.5,.6]	.8	.8	.8	.8	.8	[.4,.6]	.8
6	Inmov. material (excep. equip.)	.9	[.7,.9]	.9	.9	1	.9	[.7,.9]	[.8,.9]	.9	[.8,.9]	[.3,.4]	[.8,.9]
7	Equipos industriales	[.8,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]	1	[.8,.9]	[.8,1]	[.8,1]	[.8,1]	[.8,1]	[.8,1]	[.7,.9]	[.8,.9]
8	Inmovilizado inmaterial	[.5,.6]	[.5,.6]	[.5,.6]	[.5,.6]	[.5,.6]	[.5,.6]	[.4,.6]	[.7,.8]	[.5,.6]	[.7,.8]	.2	[.3,.6]
9	Deudas a corto plazo	[.8,.9]	.9	.9	.9	[.6,.8]	[.7,.8]	[.7,.9]	[.7,.8]	[.8,.9]	[.7,.8]	[.8,.9]	1
10	Deudas a medio y largo plazo	.9	[.7,.9]	.9	1	[.8,.9]	1	[.7,.9]	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.4,.6]	[.8,.9]
11	Capital Social	.9	[.7,.9]	.9	.9	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.5,.6]	[.7,.9]
12	Reservas	.9	[.7,.9]	.9	.9	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.5,.6]	[.7,.9]
13	Provisiones	[.8,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	1	1	1	1	1	[.5,.6]	.8
14	Fondos de amortización	[.8,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]	[.7,.9]	[.5,.7]	1	1	1	1	1	[.3,.4]	.8

Figura 15.7

La primera constatación que puede realizarse hace referencia al hecho que los "resultados" ejercen una gran influencia sobre la imagen de la empresa ya sea de manera directa ya sea a través de los efectos de segunda generación. Como se puede observar de los resultados obtenidos en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}$, la primera fila tiene unas valuaciones elevadas si se exceptúa la casilla (1, 11), incidencia de los "resultados" sobre el "grado de liquidez de la empresa", en la que aparece el intervalo de confianza [.4, .5]. Esta valuación acumulada ha sido obtenida a través del siguiente camino:

$$\boxed{\text{Resultados}} \xrightarrow{[.5,.5]} \boxed{\begin{array}{l}\text{inmobilizado}\\ \text{financiero}\end{array}} \xrightarrow{[.4,.5]} \boxed{\begin{array}{l}\text{Grado de}\\ \text{liquidez}\end{array}} \xrightarrow{[1,1]} \boxed{\begin{array}{l}\text{Grado de}\\ \text{liquidez}\end{array}}$$

(Figura 15.8)

(15.1) en donde: $.5 \wedge [.4, .5] \wedge 1 = [.4, .5]$

Existe otro camino, a través del "realizable cierto" para el que se obtiene el mismo extremo superior del intervalo (0.5).

Parece pues que los resultados obtenidos tomando como base las valuaciones suministradas por los expertos consultados concuerdan con el sentir del ambiente empresarial para el que unos buenos resultados es, por lo menos, un buen síntoma de la salud económico-financiera de una empresa.

También resulta importante para la imagen de la empresa la dimensión de las masas patrimoniales del "disponible", "realizable cierto" y "realizable condicionado" como puede observarse de las filas dos, tres y cuatro, de la matriz de incidencias acumuladas y además, en estos casos, sin excepción para ninguno de los elementos que conforman esta imagen, ya que la valuación más pequeña corresponde al extremo inferior de la incidencia sobre los "créditos hipotecarios" con un 0.6.

En relación con el inmovilizado de la empresa, al hallarse separado en cuatro grupos se puede comprobar la incidencia de cada uno de ellos en los elementos que conforman la imagen económico-financiera. Es posible, incluso, establecer un orden de mayor a menor intensidad en las relaciones de causa a efecto, para lo cual será necesario hacer caer la entropia. Veamos lo que sucede en este caso.

Se considera la fila 5 "Inmovilizado financiero":

$$V_5 = \frac{1}{12}\left(0.8 + \frac{0.7+0.8}{2} + 0.8 + \frac{0.7+0.8}{2} + \frac{0.5+0.6}{2} + 0.8 + 0.8 + 0.8 + 0.8 + 0.8 + \frac{0.4+0.6}{2} + 0.8\right) \tag{15.2}$$

$$= \frac{1}{12} \text{x}8.95{=}0.745$$

Para la fila 6 ''Inmovilizado material (excep. equipos)'' será:

(15.3) $$V_6 = \frac{1}{12}\left(0.9 + \frac{0.7+0.9}{2} + 0.9 + 0.9 + 1 + 0.9 + \frac{0.7+0.9}{2} + \frac{0.8+0.9}{2} + 0.9 + \frac{0.8+0.9}{2} + \frac{0.3+0.4}{2} + \frac{0.8+0.9}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \text{x}10{=}0.833$$

Para la fila 7 ''Equipos industriales'' será:

(15.4) $$V_7 = \frac{1}{12}\left(\frac{0.8+0.9}{2} + \frac{0.7+0.9}{2} + \frac{0.8+0.9}{2} + 1 + \frac{0.8+0.9}{2} + \frac{0.8+1}{2} + \frac{0.8+1}{2} + \frac{0.8+1}{2} + \frac{0.8+1}{2} + \frac{0.8+1}{2} + \frac{0.7+0.9}{2} + \frac{0.8+0.9}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \times 10.50 = 0.875$$

Para la fila 8 ''Inmovilizado inmaterial'', será:

$$(15.5)\ V_8 = \frac{1}{12}\left(\frac{0.5+0.6}{2} + \frac{0.5+0.6}{2} + \frac{0.5+0.6}{2}\right.$$

$$+ \frac{0.5+0.6}{2} + \frac{0.5+0.6}{2} + \frac{0.5+0.6}{2} + \frac{0.4+0.6}{2}$$

$$\left. + \frac{0.7+0.8}{2} + \frac{0.5+0.6}{2} + \frac{0.7+0.8}{2} + 0.2 + \frac{0.3+0.6}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \times 6.50 = 0.541$$

La comparación entre (15.2), (15.3), (15.4) y (15.5) permite establecer un orden de la importancia que adquiere la incidencia de cada masa patrimonial sobre la imagen de la empresa. Dado que:

$$(15.6)\qquad V_7 > V_6 > V_5 > V_8$$

se establecerá el siguiente orden:

1.º) Equipos industriales
2.º) Inmov. material (excepto equipos)
3.º) Inmov. financiero
4.º) Inmov. inmaterial

Este resultado puede ser considerado correcto, teniendo en cuenta que se ha adoptado la hipótesis de que cada uno de los conceptos considerados como ''efectos'' tiene el mismo peso cuando se agrupan para formar lo que hemos denominado imagen económico-financiera de la empresa.

Por otra parte no puede extrañar que se haya obtenido este orden dado que el porvenir de una empresa está mucho más ligado a su tecnología, que a los inmuebles y mucho más que a las acciones en cartera que posee (sobre todo en las empresas industriales) y desde luego más que a su inmovilizado inmaterial.

En cuanto a la incidencia de las deudas de la empresa en su ''imagen'', se observa que adquieren una elevada importancia, tanto en lo que se refiere a las ''deudas a corto plazo'' como a las ''deudas a medio y largo plazo'' con una ligera ventaja en esta última masa patrimonial si se exceptúa la característica de liquidez en la que, evidentemente, ejercen una mayor incidencia las ''deudas a corto plazo''.

Resulta interesante constatar, también, que la incidencia del ''Capital'' sobre cada uno de los elementos representativos de la imagen de la empresa en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}$, que representa los efectos acumulados de primera y segunda generación, es exactamente la misma que la de las ''Reservas'', cuando en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ de efectos de primera generación no sucedía así, de donde se deduce que estas dos masas de capitales propios tienen la misma importancia en orden a ''la estima'' económico-financiera de una empresa.

Cabe también observar que la falta de incidencia en las casillas (5,12) y (13,12) de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}$ ha desaparecido al obtener la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}$, en donde aparecen unas valuaciones de 0.8 a través de los ''resultados'' y de los ''otros créditos de funcionamiento''. El camino seguido es:

para la relación ''Inmovilizado financiero'' - ''Exigibilidad empresa'':

$$\boxed{\text{Inmovilizado financiero}} \xrightarrow{.8} \boxed{\text{Resultados}} \xrightarrow{.8} \boxed{\text{Otros créditos de funcionamiento}} \xrightarrow{.9} \boxed{\text{Exigibilidad empresa}}$$

Figura 15.9

(15.7) por lo que: $0.8 \wedge 0.8 \wedge 0.9 = 0.8$

y también, para la relación "Provisiones" - "Exigibilidad empresa":

$$\boxed{\text{Provisiones}} \xrightarrow{1} \boxed{\text{Resultados}} \xrightarrow{.8} \boxed{\text{Otros créditos de funcionamiento}} \xrightarrow{.9} \boxed{\text{Exigibilidad empresa}}$$

Figura 15.10

(15.8) por lo que: $1 \wedge 0.8 \wedge 0.9 = 0.8$

Pero quizás la consecuencia más significativa que puede extraerse de la matriz que expresa los efectos acumulados de primera y segunda generación es la gran incidencia que existe entre cada una de las masas patrimoniales sean de la estructura económica o de la estructura financiera del balance con los diversos aspectos que pueden definir la ''imagen'' o ''apreciación'' que la empresa merece a los agentes económico-financieros que con ella se relacionan. Aún en los casos en que las relaciones directas o de primer grado no aparecen de manera explícita en la mente de los expertos a través de las conexiones que evidentemente existen entre las causas con ellas mismas y los efectos consigo mismos, surgen, en definitiva, al acumular las relaciones de causa a efecto de primer y segundo orden.

Estas interconexiones financieras son, evidentemente conocidas por los especialistas en la materia pero no siempre aparecen con la suficiente claridad y ni siquiera, en la mayor parte de las veces, se hacen explícitas, lo que en cambio se consigue a través del modelo que presentamos.

Vamos seguidamente a abordar la última fase de este esquema, que consiste en recuperar los efectos olvidados en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ de incidencias de primer grado que los expertos habían elaborado.

Para ello, y tal como se ha señalado en el epígrafe 7, se va a obtener la distancia existente entre cada elemento de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ y su correspondiente en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^* = \underset{\sim}{\mathcal{A}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}$. Se tomará como distancia la media de las diferencias entre los extremos inferiores y los extremos superiores. Así, si un intervalo de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ es $[a_1, a_2]$ y el correspondiente de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*$ es $[b_1, b_2]$, la distancia para este elemento será:

$$(15.9) \qquad d = \frac{(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)}{2}$$

Habida cuenta de que, como ya se ha señalado:

$$(15.10) \qquad \underset{\sim}{\mathcal{M}} \underset{\Phi}{\subset} \underset{\sim}{\mathcal{M}}^*$$

no podrán producirse compensaciones por el signo entre $(b_1 - a_1)$ y $(b_2 - a_2)$ ya que ambas diferencias serán siempre mayores o iguales a cero.

La matriz de distancias $d_{\underset{\sim}{\mathcal{M}}, \underset{\sim}{\mathcal{M}}^*}$ resultante, que presentamos en la figura 15.11, pone de manifiesto el grado de olvido en cada una de las relaciones de causa a efecto.

	$d_{\mathfrak{M}_i\mathfrak{M}_j}$:	1 Créditos de proveedores	2 Descuento efectos	3 Otros Créditos de funcionamiento	4 Créditos a medio y largo plazo	5 Créditos Hipotecarios	6 Aumento de capital	7 Aumento de reservas	8 Aumento en la cotización de acciones	9 Solvencia de la sociedad	10 Valor de la empresa	11 Grado de liquidez de la empresa	12 Exigibilidad de la empresa
1	Resultados	0.65	0.30	0.10	0.30	0.50	0	0	0.30	0.25	0.20	0.30	0.80
2	Disponible	0.15	0	0	0.25	0.35	0.75	0.35	0.50	0.35	0.25	0	0.90
3	Realizable cierto	0.85	0	0.15	0.45	0.55	0.55	0.80	0.60	0.75	0.40	0	0.90
4	Realizable condicionado	0	0.05	0.05	0.15	0.65	0.45	0.80	0.75	0.25	0.50	0.20	1
5	Inmovilizado financiero	0.60	0.75	0.65	0.15	0.25	0.60	0.80	0.80	0.35	0.35	0.05	0.80
6	Inmov. material (excep. equip.)	0.90	0.55	0.90	0.20	0	0.05	0.80	0.40	0.10	0.10	0.25	0.85
7	Equipos industriales	0.85	0.25	0.85	0	0.65	0.20	0.90	0.90	0.35	0.45	0.50	0.85
8	Inmovilizado inmaterial	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	0.30	0.50	0.35	0.10	0	0.20	0.45
9	Deudas a corto plazo	0.65	0	0.10	0.15	0.70	0.65	0.50	0.75	0.10	0.40	0.85	0
10	Deudas a medio y largo plazo	0.55	0.10	0.10	0	0	0.20	0.05	0.80	0	0.05	0.50	0
11	Capital Social	0.20	0.45	0.55	0.20	0.80	0.25	0.80	0.80	0	0	0.55	0.80
12	Reservas	0.20	0.45	0.55	0.20	0.80	0.70	0.30	0.35	0	0	0.55	0.80
13	Provisiones	0.40	0.80	0.60	0.50	0.80	1	0.55	0.75	0.50	0.65	0.55	0.80
14	Fondos de amortización	0.85	0.80	0.85	0.80	0.15	0.55	1	0.75	0.50	0.50	0.35	0.80

Figura 15.7

En una primera observación a esta matriz de distancias $d_{\underset{\sim}{\mathcal{M}}, \underset{\sim}{\mathcal{M}}^*}$ surgen tres relaciones de causa a efecto que los expertos habían considerado como inexistentes en sus valuaciones de incidencia, presentadas en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$. Se trata de las incidencias:

(a_4) Realizable condicionado $\rightarrow$ (b_{12}) Exigibilidad de la empresa

(a_{13}) Provisiones $\rightarrow$ (b_6) Aumentos de Capital

(a_{14}) Fondo de Amortización $\rightarrow$ (b_7) Aumento de Reservas

No resulta fácil, de manera intuitiva, determinar los caminos que debería seguir nuestro razonamiento para llegar a establecer estas conexiones. Por ello se van a utilizar, tal como se ha hecho anteriormente, unos grafos.

Veamos en primer lugar la incidencia del "realizable condicionado" sobre la "exigibilidad de la empresa". Entre todos los caminos posibles, sólo uno:

a_4		a_9		b_{12}		b_{12}
Realizable condicionado	$\xrightarrow{1}$	Deudas a corto plazo	$\xrightarrow{1}$	Exigibilidad de la empresa	$\xrightarrow{1}$	Exigibilidad de la empresa

Figura 15.12

permite un efecto acumulado valuado en 1; todos los caminos restantes comportan unos efectos de 1.º y 2.º generación menos intensos. Se puede comprobar, al menos parcialmente, este resultado a través de un grafo, el de la figura 15.13, en el que se han omitido todos los caminos que parten del "efecto" a_j cuando $a_j \in \{1,2,...,14\}$ y $a_j \neq a_9$, para conseguir una mayor claridad en la representación.

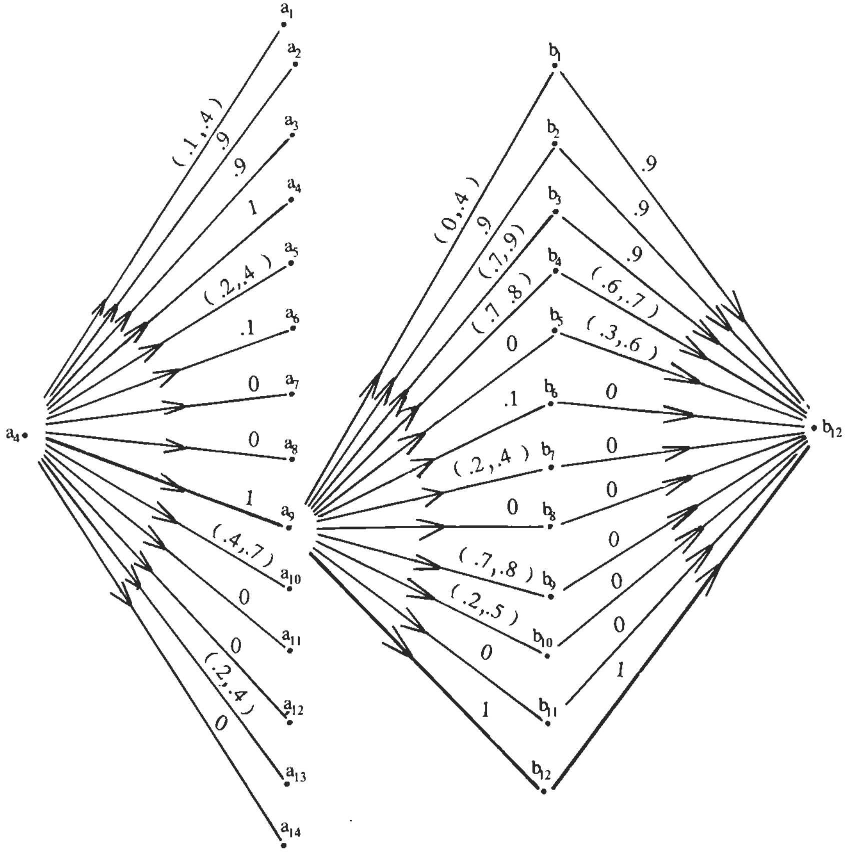

a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
a8
a9
a10
a11
a12
a13
a14
(.1,.4)
.9
.9
1
(.2,.4)
.1
0
0
1
(.4,.7)
0
0
(.2,.4)
0
b1
b2
b3
b4
b5
b6
b7
b8
b9
b10
b11
b12
(0,.4)
.9
(.7,.9)
(.7,.8)
0
.1
(.2,.4)
0
(.7,.8)
(.2,.5)
0
1
.9
.9
.9
(.6,.7)
(.3,.6)
0
0
0
0
0
0
1

Figura 15.13

La simplicidad de esta cadena de relaciones exime prácticamente de cualquier comentario clarificador. Si la relación directa entre el "realizable condicionado" y la "exigibilidad de la empresa" se ha considerado nula, en opinión de los expertos, parece evidente la total incidencia entre la compra de materias primas y productos semi elaborados, por ejemplo, y el aumento en la cuenta de proveedores que, a su vez, implica una exigibilidad (a corto plazo) de la empresa.

Otro de los efectos olvidados por los expertos viene dado por la incidencia de las "provisiones" sobre los "aumentos de Capital". El camino que da lugar a una incidencia acumulada valuada en 1 es:

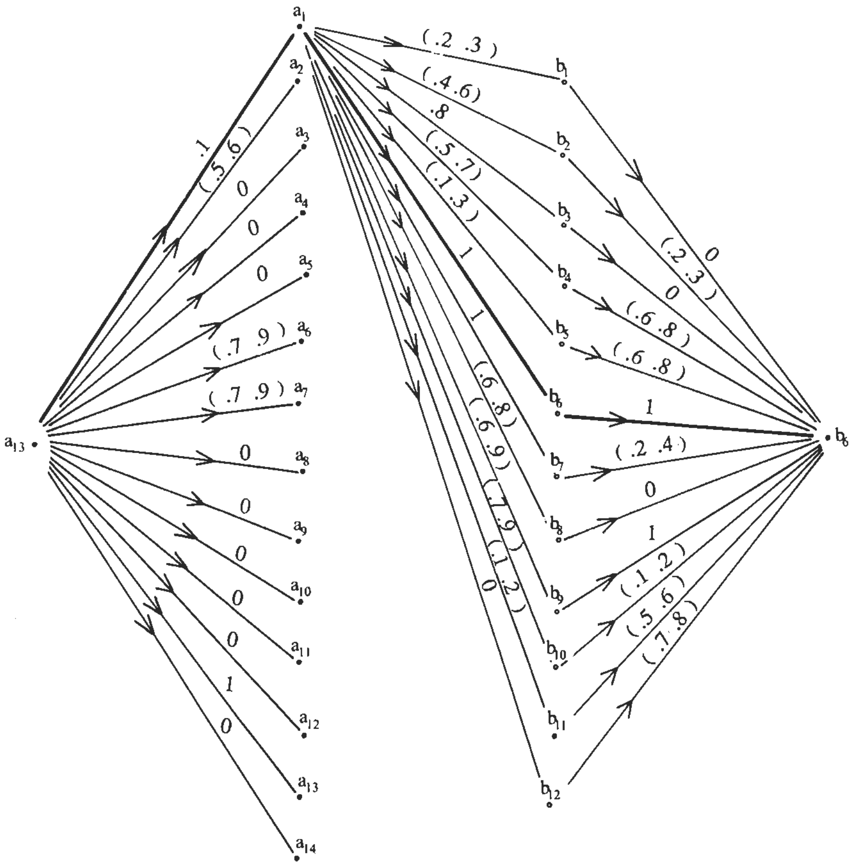
$$\overset{a_{13}}{\boxed{\text{Provisiones}}} \xrightarrow{1} \overset{a_{1}}{\boxed{\text{Resultados}}} \xrightarrow{1} \overset{b_{6}}{\boxed{\begin{array}{c}\text{Aumentos}\\ \text{de Capital}\end{array}}} \xrightarrow{1} \overset{b_{6}}{\boxed{\begin{array}{c}\text{Aumentos}\\ \text{de Capital}\end{array}}}$$

Figura 15.14

De nuevo representamos mediante el grafo de la figura 15.15 la cadena de incidencias que dan lugar al efecto olvidado 1-0=1. En aras a la claridad en la representación sólo se ponen de manifiesto las relaciones de causa a efecto que van desde a_{13} hasta a_1 y todas las existentes a partir de a_1 hasta b_6. La incidencia global será:

(15.11) $\qquad 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$

tal como ha sido mostrado anteriormente y se puede ver en el grafo siguiente:



a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
a8
a9
a10
a11
a12
a13
a14
a13
b1
b2
b3
b4
b5
b6
b7
b8
b9
b10
b11
b12
b6

Figura 15.15

La justificación de esta elevada incidencia viene dada cuando se tiene en cuenta que los expertos consideraron una total relación de causa a efecto entre la magnitud de las provisiones realizadas y la formación de los resultados de un ejercicio. Cabría establecer a este respecto determinadas matizaciones sobre el sentido que los citados expertos dieron al concepto provisiones. En efecto parece evidente que la existencia de una elevada masa patrimonial de provisiones facilita el beneficio de la empresa, pero la incidencia absoluta surge realmente cuando las provisiones tienen lugar en el mismo ejercicio en que se considera el beneficio. La agregación de ambas circunstancias podría hacer que se aceptara esta valuación con un cierto carácter de generalidad.

Por otra parte no resulta difícil admitir la total incidencia de los ''resultados'' sobre los ''aumentos de Capital''. Unos resultados no satisfactorios pueden inducir a un aumento del Capital social de una empresa con vistas a remediar mediante nuevas aportaciones una situación no deseada a largo plazo. Unos elevados resultados pueden llevar a los accionistas a aumentar la actividad y consolidar la empresa, habida cuenta de la alta rentabilidad conseguida.

El último de los efectos olvidados que tiene la máxima incidencia aparece en la relación ''Fondo de amortización''-''Aumento de Reservas'' que no ha merecido atención alguna por parte de los expertos.

El camino que se sigue para obtener el resultado señalado es el siguiente:

$$\underset{\boxed{\text{Fondo de amortización}}}{a_{14}} \xrightarrow{1} \underset{\boxed{\text{Resultados}}}{a_1} \xrightarrow{1} \underset{\boxed{\text{Aumento de reservas}}}{b_7} \xrightarrow{1} \underset{\boxed{\text{Aumento de reservas}}}{b_7}$$

Figura 15.16

El grafo simplificado que permite comparar este camino con otros que surgen del ''efecto'' a_1, se presenta en la figura 15.17.

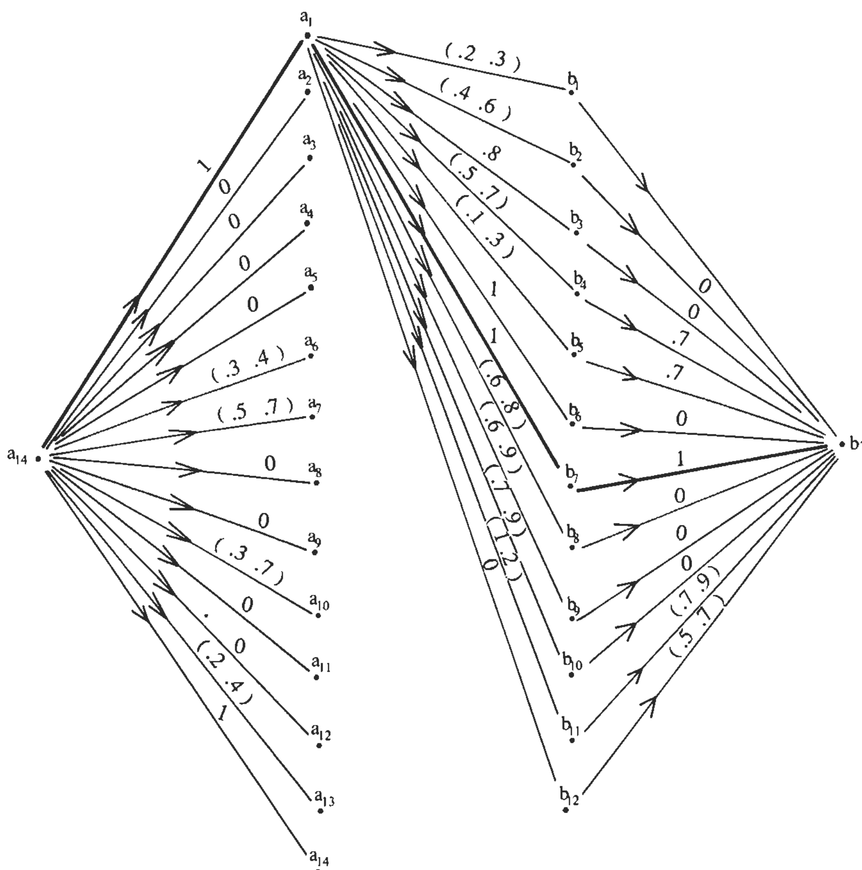


Figura 15.17

Hay que tener en cuenta, para comprender esta alta incidencia del ''Fondo de amortización'' sobre el ''Aumento de las reservas'' el sentido de la valuación que los expertos han asignado a la relación ''Fondo de amortización''-''Resultados''. Una buena política de amortizaciones debe permitir una adecuada renovación de los equipos industriales, base fundamental para la obtención de buenos resultados por parte de la empresa, sobre todo en una época caracterizada por el elevado grado de obsolescencia de maquinaria e instalaciones debido al progreso técnico, en permanente aceleración.

Por demás resulta evidente que los resultados de un ejercicio son la causa fundamental y necesaria para la constitución y ampliación de Reservas.

Podríamos continuar este análisis con el estudio de aquellos efectos olvidados, con una valuación de 0.9, como sucede con las relaciones ''Disponible''-''Exigibilidad de la empresa'', ''Equipos industriales''-''Aumento de Reservas'' e ''Inmovilizado material (excepto equipos)''-''Crédito de proveedores'', entre otros. Creemos, sin embargo, que con las relaciones que hemos desarrollado, queda suficientemente explicado y contrastado un modelo, cuya característica diferenciadora reside en la mayor flexibilidad y en consecuencia comodidad para la formulación de valuaciones por parte de los expertos, al poder expresar su opinión subjetiva a través de intervalos de confianza en lugar de hacerlo mediante números fijos.

16.- Los efectos olvidados en la determinación de la imagen comercial de la empresa

El prestigio comercial de una empresa es el resultado de la impresión que los potenciales demandantes tienen de los productos que comercializa, a través de ciertas sensaciones de aspectos diversos y hasta cierto punto heterogéneos. Mejorar la imagen comercial de una empresa significa potenciar aquellos elementos que la configuran.

Sin pretender una enumeración exhaustiva, y teniendo en cuenta el objetivo de esta obra, vamos a enumerar algunos de los que creemos más significativos.

* Imagen comercial de una empresa:

1) Aumento ventas (unidades físicas)
2) Variación precios de venta
3) Posición competitiva
4) Modificación cuota mercado
5) Calidad de los productos
6) Distribución territorial
7) Seriedad en los suministros

Los medios de que se dispone o se pueden poner en marcha para incidir en estos aspectos son variados y afectan prácticamente a todos los subsistemas de gestión. Pero a modo de ensayo se pueden considerar los siguientes:

* Medios de acción sobre la imagen comercial:
1) Modernización equipos productivos
2) Variación y ampliación de los stocks
3) Capacitación del factor humano
4) Fabricación de nuevos productos y/o servicios
5) Mejor presentación de los productos
6) Creación o mejora de laboratorios de investigación y control
7) Mejora de los medios de transporte
8) Ampliación red comercial
9) Acciones publicitarias

Es evidente que esta lista de medios es susceptible de ampliación e incluso desglose separando un concepto en varios que podrían tener una incidencia sensiblemente distinta en alguno de los elementos que definen la imagen comercial. Sin embargo creemos suficiente esta enumeración en un trabajo como este, que pretende difundir unos nuevos modelos y algunas de sus posibles aplicaciones.

Vamos a proceder al establecimiento de las relaciones de causa a efecto entre cada uno de los medios y los elementos que configuran la imagen de la empresa con objeto de determinar las incidencias directas y de 2.º generación recuperando posteriormente los ''efectos olvidados''.

Hasta ahora los modelos que hemos aplicado tanto al ámbito electoral como al financiero se basaban en la opinión subjetiva de un experto, aunque en ambos casos habíamos reunido varios técnicos para que dieran una opinión conjunta, lo que no siempre ha resultado fácil.

En el esquema que vamos a desarrollar la opinión de los expertos se expresa individualmente, sin que exista comunicación ni se haya establecido conexión alguna entre ellos. Evidentemente nuestro deseo hubiera sido poder contar con un elevado número de técnicos que permitieran la suficiente información para poder establecer probabilidades válidas. Pero las limitaciones a las que nos hemos visto sometidos, por una parte, y el deseo de presentar estas aplicaciones con la máxima sencillez, por otra, nos han obligado a reducir el número de colaboradores, que para mayor simplicidad en los cálculos y comprobaciones hemos establecido en 10. Somos conscientes evidentemente que hablar de probabilidad con este reducido número de ''eventos'' constituye una profanación del edificio sagrado de lo aleatorio, pero el lector no debe olvidar que nuestro objetivo, reiteradamente expuesto, consiste en presentar unos modelos y sus amplias posibilidades de utilización en diversos campos, principalmente, aunque no de manera exclusiva, en el de la gestión. De esta manera el interesado en el estudio de este tema podrá, además, establecer conexiones con la primera parte de esta obra en la que todos los ejemplos didácticos se han realizado en base a la consulta con 10 expertos.

Una vez explicitadas las limitaciones de este caso pasemos a presentar desde (16.1) a (16.10), a través de las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(j)}$ $j=1,2,...,10$ las opiniones que de manera independizada y sin conexión alguna han realizado los 10 expertos.

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(1)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.9	.3	.1	.4	.9	0	0
2	Variaciones y ampliación stocks	.8	.2	.3	.7	0	.6	.8
3	Capacitación factor humano	.7	.1	.4	.3	.3	.4	.9
4	Fabricación nuevos productos	1	0	.8	.7	0	.6	0
5	Mejor presentación productos	.5	.6	.3	.2	0	.4	0
6	Creación o mejora laboratorios	.1	.3	.2	.2	1	0	0
7	Mejora en medios de transporte	.8	0	.6	.5	0	1	.9
8	Ampliación red comercial	1	.2	.7	.6	0	1	0
9	Acciones publicitarias	1	.6	.7	.7	0	.1	0

(16.1)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(2)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.7	1	0	.1	1	0	0
2	Variaciones y ampliación stocks	.6	0	.3	.2	.2	.1	.6
3	Capacitación factor humano	.8	.2	.4	.2	.6	.1	.7
4	Fabricación nuevos productos	1	.2	1	1	0	0	0
5	Mejor presentación productos	.6	.8	.2	.2	0	0	0
6	Creación o mejora laboratorios	.2	.4	0	0	1	0	0
7	Mejora en medios de transporte	.3	0	.1	.1	0	1	1
8	Ampliación red comercial	.8	.2	1	.8	0	1	.2
9	Acciones publicitarias	.9	.3	.5	.4	0	0	0

(16.2)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(3)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.4	.5	.3	.2	1	0	.1
2	Variaciones y ampliación stocks	.4	.6	.4	.4	.5	.5	1
3	Capacitación factor humano	.6	.6	.2	.3	.8	.2	1
4	Fabricación nuevos productos	1	.2	.8	.6	.1	.1	0
5	Mejor presentación productos	.5	.6	.3	.2	0	0	0
6	Creación o mejora laboratorios	.2	.4	.4	.2	1	0	.3
7	Mejora en medios de transporte	.6	0	.2	.1	0	1	.8
8	Ampliación red comercial	.8	.2	.7	.6	0	1	.4
9	Acciones publicitarias	.9	.7	.8	.9	0	.6	0

(16.3)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(4)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.5	.7	.8	.5	1	0	0
2	Variaciones y ampliación stocks	.6	.1	.7	.3	.3	.1	.8
3	Capacitación factor humano	.7	.2	.6	.5	.8	0	1
4	Fabricación nuevos productos	1	.1	.8	.8	0	.4	0
5	Mejor presentación productos	.6	.6	.5	.2	0	.1	0
6	Creación o mejora laboratorios	.3	.6	.5	.5	1	0	.3
7	Mejora en medios de transporte	.7	.1	.3	.1	0	.9	.6
8	Ampliación red comercial	1	.3	1	.8	0	1	0
9	Acciones publicitarias	1	.7	.9	.8	0	.6	0

(16.4)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(5)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.4	.5	.3	.2	1	0	.3
2	Variaciones y ampliación stocks	.6	.5	.6	.4	.5	0	.9
3	Capacitación factor humano	.9	.6	.7	.6	.8	.4	1
4	Fabricación nuevos productos	1	0	.8	.8	.1	.3	0
5	Mejor presentación productos	.6	.8	.5	.5	0	0	0
6	Creación o mejora laboratorios	.1	.7	.6	.4	1	0	0
7	Mejora en medios de transporte	.8	.2	.7	.3	0	1	.9
8	Ampliación red comercial	1	.3	.8	.7	0	1	.6
9	Acciones publicitarias	1	.8	.8	.8	0	.6	0

(16.5)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(6)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.5	.8	.7	.4	.9	0	0
2	Variaciones y ampliación stocks	.6	.7	.2	.2	.4	0	.9
3	Capacitación factor humano	.8	.8	.9	.8	.8	.5	.7
4	Fabricación nuevos productos	1	.1	.7	.5	0	0	0
5	Mejor presentación productos	.5	.7	.3	.1	0	0	0
6	Creación o mejora laboratorios	.2	.9	.3	.3	.9	0	0
7	Mejora en medios de transporte	.7	.4	.5	.3	0	.8	.8
8	Ampliación red comercial	1	.6	1	.8	0	1	.9
9	Acciones publicitarias	1	.4	.9	.9	0	.6	0

(16.6)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(7)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.3	.9	.8	.3	.9	.1	0
2	Variaciones y ampliación stocks	.4	.6	.5	.1	.4	.3	.8
3	Capacitación factor humano	.9	.6	.8	.6	.9	.8	.9
4	Fabricación nuevos productos	1	.2	.7	.7	.1	.6	0
5	Mejor presentación productos	.6	.7	.5	.4	0	0	0
6	Creación o mejora laboratorios	.3	.7	.6	.1	1	0	0
7	Mejora en medios de transporte	.4	.3	.6	.3	0	1	.6
8	Ampliación red comercial	1	.3	1	.6	0	1	.8
9	Acciones publicitarias	1	.6	.7	.7	0	.4	0

(16.7)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(8)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.3	.7	.4	.2	1	0	0
2	Variaciones y ampliación stocks	.4	.6	.3	.1	.5	.2	.9
3	Capacitación factor humano	.8	.7	.9	.7	1	.8	1
4	Fabricación nuevos productos	1	.2	1	.8	0	.1	0
5	Mejor presentación productos	.9	.8	.6	.6	0	.1	0
6	Creación o mejora laboratorios	.2	.8	.1	.1	.9	0	0
7	Mejora en medios de transporte	.3	.2	.2	0	0	.7	.7
8	Ampliación red comercial	.9	0	1	.6	0	1	.6
9	Acciones publicitarias	.8	.8	.9	.8	0	.2	0

(16.8)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(9)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.5	.7	.3	.3	.8	0	.4
2	Variaciones y ampliación stocks	.5	.4	.6	.2	.5	.6	.6
3	Capacitación factor humano	.6	.4	.7	.6	.8	.1	.8
4	Fabricación nuevos productos	.9	.2	.9	.9	.1	0	0
5	Mejor presentación productos	.6	.9	.7	.6	0	0	0
6	Creación o mejora laboratorios	.2	.8	.1	0	.9	0	0
7	Mejora en medios de transporte	.4	.1	.1	.1	0	.8	.7
8	Ampliación red comercial	1	0	1	.7	0	1	.1
9	Acciones publicitarias	1	.8	.9	.9	0	0	0

(16.9)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(10)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.7	.8	.6	.1	1	0	0
2	Variaciones y ampliación stocks	.5	.7	.8	.4	.5	.6	.5
3	Capacitación factor humano	.8	.8	.9	.3	.8	0	1
4	Fabricación nuevos productos	1	.1	.8	.7	0	.2	0
5	Mejor presentación productos	.6	.8	.6	.5	0	0	0
6	Creación o mejora laboratorios	.4	.6	.2	.1	1	.1	0
7	Mejora en medios de transporte	.5	.2	.5	.2	0	1	.8
8	Ampliación red comercial	1	0	.9	.7	0	1	.9
9	Acciones publicitarias	.7	.8	.7	.9	0	0	0

(16.10)

Con ello hemos obtenido 10 informaciones sobre un mismo problema, realizadas por expertos cuya procedencia es distinta, tanto desde un punto de vista geográfico como por su ''currículum'' académico y profesional. Una rápida mirada a estas matrices permite observar que existe una absoluta coincidencia en alguna de las incidencias (a_1, b_6), (a_4, b_7),... mientras que en otras las discrepancias son importantes como en (a_3, b_6), (a_8, b_7),...

Los datos que contienen las matrices de (16.1) a (16.10) van a ser recogidos en una nueva matriz, la (16.11), que presenta de una manera ordenada las ''estadísticas'' que conciernen a la opinión de los expertos consultados.

(16.11)

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	0	0	1	0	0	9	7
	.1	0	0	1	2	0	1	1
	.2	0	0	0	3	0	0	0
	.3	2	1	3	2	0	0	1
	.4	2	0	1	2	0	0	1
	.5	3	2	0	1	0	0	0
	.6	0	0	1	0	0	0	0
	.7	2	3	1	0	0	0	0
	.8	0	2	2	0	1	0	0
	.9	1	1	0	0	3	0	0
	1	0	1	0	0	6	0	0
a_2	0	0	1	0	0	1	2	0
	.1	0	1	0	2	0	2	0
	.2	0	1	1	3	1	1	0
	.3	0	0	3	1	1	1	0
	.4	3	1	1	3	2	0	0
	.5	2	1	1	0	5	1	1
	.6	4	3	2	0	0	3	2
	.7	0	2	1	1	0	0	0
	.8	1	0	1	0	0	0	3
	.9	0	0	0	0	0	0	3
	1	0	0	0	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0	0	0	2	0
	.1	0	1	0	0	0	2	0
	.2	0	2	1	1	0	1	0
	.3	0	0	0	3	1	0	0
	.4	0	1	2	0	0	2	0
	.5	0	0	0	1	0	1	0
	.6	2	3	1	3	1	0	0
	.7	2	1	2	1	0	0	2
	.8	4	2	1	1	6	2	1
	.9	2	0	3	0	1	0	2
	1	0	0	0	0	1	0	5
a_4	0	0	2	0	0	6	3	10
	.1	0	3	0	0	4	2	0
	.2	0	5	0	0	0	1	0
	.3	0	0	0	0	0	1	0
	.4	0	0	0	0	0	1	0
	.5	0	0	0	1	0	0	0
	.6	0	0	0	1	0	2	0
	.7	0	0	2	3	0	0	0
	.8	0	0	5	3	0	0	0
	.9	1	0	1	1	0	0	0
	1	9	0	2	1	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0	10	7	10
	.1	0	0	0	1	0	2	0
	.2	0	0	1	4	0	0	0
	.3	0	0	3	0	0	0	0
	.4	0	0	0	1	0	1	0
	.5	3	0	3	2	0	0	0
	.6	6	3	2	2	0	0	0
	.7	0	2	1	0	0	0	0
	.8	0	4	0	0	0	0	0
	.9	1	1	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
a_6	0	0	0	1	2	0	9	8
	.1	2	0	2	3	0	1	0
	.2	5	0	2	2	0	0	0
	.3	2	1	1	1	0	0	2
	.4	1	2	1	1	0	0	0
	.5	0	0	1	1	0	0	0
	.6	0	2	2	0	0	0	0
	.7	0	2	0	0	0	0	0
	.8	0	2	0	0	0	0	0
	.9	0	1	0	0	3	0	0
	1	0	0	0	0	7	0	0
a_7	0	0	3	0	1	10	0	0
	.1	0	2	2	4	0	0	0
	.2	0	3	2	1	0	0	0
	.3	2	1	1	3	0	0	0
	.4	2	1	0	0	0	0	0
	.5	1	0	2	1	0	0	0
	.6	1	0	2	0	0	0	2
	.7	2	0	1	0	0	1	2
	.8	2	0	0	0	0	2	3
	.9	0	0	0	0	0	1	2
	1	0	0	0	0	0	6	1
a_8	0	0	3	0	0	10	0	2
	.1	0	0	0	0	0	0	1
	.2	0	3	0	0	0	0	1
	.3	0	3	0	0	0	0	0
	.4	0	0	0	0	0	0	1
	.5	0	0	0	0	0	0	0
	.6	0	1	0	4	0	0	2
	.7	0	0	2	3	0	0	0
	.8	2	0	1	3	0	0	1
	.9	1	0	1	0	0	0	2
	1	7	0	6	0	0	10	0
a_9	0	0	0	0	0	10	3	10
	.1	0	0	0	0	0	1	0
	.2	0	0	0	0	0	1	0
	.3	0	1	0	0	0	0	0
	.4	0	1	0	1	0	1	0
	.5	0	0	1	0	0	0	0
	.6	0	2	0	0	0	4	0
	.7	1	2	3	2	0	0	0
	.8	1	4	2	3	0	0	0
	.9	2	0	4	4	0	0	0
	1	6	0	0	0	0	0	0

Se puede observar que en cada una de las casillas se ha colocado una cifra que representa el número de veces que se repite la misma valuación por parte de los expertos consultados. Así, por ejemplo, en las casillas (a_1, b_1) se tiene que dos expertos han considerado la incidencia en 0.3; otros 2 en 0.4; 3 de ellos la han valuado en 0.5; 2 en 0.7 y finalmente 1 en 0.9.

Esta matriz sirve de base para confeccionar otra en la cual estos datos deberían ser expresados en términos relativos, es decir que, en el supuesto de que se cumplieran las condiciones que la noción de probabilidad exige, vendrían dados en términos de probabilidad. En este caso, y con las limitaciones señaladas, bastaría dividir estas cifras por 10, número de expertos consultados. Así, pues, donde aparece un 2 debería colocarse un 0.2, en la casilla que hay un 3, figuraría un 0.3, y así sucesivamente. El hecho de habernos servido de 10 opiniones nos evita presentar una nueva matriz de probabilidades que coincidiría con la (16.11) con la única diferencia que en lugar de unidades aparecerían décimas.

A partir de estos datos se obtiene la ley acumulada de la siguiente manera: Para cada relación (a_j, b_k) se considera la probabilidad de que se dé una valuación máxima (la unidad) y a medida que se desciende en la escala de niveles hasta cero, se van acumulando las probabilidades. Así en la relación (a_1, b_1) se tiene una probabilidad de 0 de que la valuación de la incidencia sea 1, una probabilidad de 0.1 de que la incidencia sea 0.9, una probabilidad de 0.1 de que sea por lo menos 0.8, una probabilidad de 0.3 de que la incidencia sea por lo menos 0.7,... Evidentemente la probabilidad de que sea igual o mayor a 0 deberá ser siempre 1.

En el tema que estudiamos, la relación (a_1, b_1) pone de manifiesto la incidencia de la "modernización de los equipos" en el "aumento de las ventas". Los resultados obtenidos indican que, en opinión de los expertos, existe una probabilidad de 0.6 de que por lo menos la incidencia sea 0.5, por ejemplo.

Como puede observarse, a través de la matriz aleatoria borrosa (16.12) se ha conseguido reunir, sin que ni uno ni otro pierdan su identidad, elementos aleatorios e inciertos, lo que, en cierto modo reduce el grado de subjetividad de las estimaciones expresadas, sin que se pierda información.

(16.12)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}} =$

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	.9	1	1	.1	.3
	.2	1	1	.8	.8	1	0	.2
	.3	1	1	.8	.5	1	0	.2
	.4	.8	.9	.5	.3	1	0	.1
	.5	.6	.9	.4	.1	1	0	0
	.6	.3	.7	.4	0	1	0	0
	.7	.3	.7	.3	0	1	0	0
	.8	.1	.4	.2	0	1	0	0
	.9	.1	.2	0	0	.9	0	0
	1	0	.1	0	0	.6	0	0
a_2	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.9	1	1	.9	.8	1
	.2	1	.8	1	.8	.9	.6	1
	.3	1	.7	.9	.5	.8	.5	1
	.4	1	.7	.6	.4	.7	.4	1
	.5	.7	.6	.5	.1	.5	.4	1
	.6	.5	.5	.4	.1	0	.3	.9
	.7	.1	.2	.2	.1	0	0	.7
	.8	.1	0	.1	0	0	0	.7
	.9	0	0	0	0	0	0	.4
	1	0	0	0	0	0	0	.1
a_3	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	.8	1
	.2	1	.9	1	1	1	.6	1
	.3	1	.7	.9	.9	1	.5	1
	.4	1	.7	.9	.6	.9	.5	1
	.5	1	.6	.7	.6	.9	.3	1
	.6	1	.6	.7	.5	.9	.2	1
	.7	.8	.3	.6	.2	.8	.2	1
	.8	.6	.2	.4	.1	.8	.2	.8
	.9	.2	0	.3	0	.2	0	.7
	1	0	0	0	0	.1	0	.5
a_4	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.8	1	1	.4	.7	0
	.2	1	.5	1	1	0	.5	0
	.3	1	0	1	1	0	.4	0
	.4	1	0	1	1	0	.3	0
	.5	1	0	1	1	0	.2	0
	.6	1	0	1	.9	0	.2	0
	.7	1	0	1	.8	0	0	0
	.8	1	0	.8	.5	0	0	0
	.9	1	0	.3	.2	0	0	0
	1	.9	0	.2	.1	0	0	0
a_5	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	0	.3	0
	.2	1	1	1	.9	0	.1	0
	.3	1	1	.9	.5	0	.1	0
	.4	1	1	.6	.5	0	.1	0
	.5	1	1	.6	.4	0	0	0
	.6	.7	1	.3	.2	0	0	0
	.7	.1	.7	.1	0	0	0	0
	.8	.1	.5	0	0	0	0	0
	.9	.1	.1	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_6	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	.9	.8	1	.1	.2
	.2	.8	1	.7	.5	1	0	.2
	.3	.3	1	.5	.3	1	0	.2
	.4	.1	.9	.4	.2	1	0	0
	.5	0	.7	.3	.1	1	0	0
	.6	0	.7	.2	0	1	0	0
	.7	0	.5	0	0	1	0	0
	.8	0	.3	0	0	1	0	0
	.9	0	.1	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	0	.7	0	0
a_7	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.7	1	.9	0	1	1
	.2	1	.5	.8	.5	0	1	1
	.3	1	.2	.6	.4	0	1	1
	.4	.8	.1	.5	.1	0	1	1
	.5	.6	0	.5	.1	0	1	1
	.6	.5	0	.3	0	0	1	1
	.7	.4	0	.1	0	0	1	.8
	.8	.2	0	0	0	0	.9	.6
	.9	0	0	0	0	0	.7	.3
	1	0	0	0	0	0	.6	.1
a_8	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.7	1	1	0	1	.8
	.2	1	.7	1	1	0	1	.7
	.3	1	.4	1	1	0	1	.6
	.4	1	.1	1	1	0	1	.6
	.5	1	.1	1	1	0	1	.5
	.6	1	.1	1	1	0	1	.5
	.7	1	0	1	.6	0	1	.3
	.8	1	0	.8	.3	0	1	.3
	.9	.8	0	.7	0	0	1	.2
	1	.7	0	.6	0	0	1	0
a_9	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	0	.7	0
	.2	1	1	1	1	0	.6	0
	.3	1	1	1	1	0	.5	0
	.4	1	.9	1	1	0	.5	0
	.5	1	.8	1	.9	0	.4	0
	.6	1	.8	.9	.9	0	.4	0
	.7	1	.6	.9	.9	0	0	0
	.8	.9	.4	.6	.7	0	0	0
	.9	.8	0	.4	.4	0	0	0
	1	.6	0	0	0	0	0	0

Con objeto de hallar los efectos acumulados de primera y segunda generación se solicitó a los mismos expertos que expresaran su opinión en relación a las posibles incidencias de cada uno de los conceptos que constituyen las ''causas'', y que han sido colocados como filas en las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(j)}$, para consigo mismo y para con las demás ''causas''. De esta manera cada posible acción a emprender que incidiría en la imagen comercial constituía una causa y un efecto de sí misma y de las demás.

Se obtienen así las 10 nuevas matrices cuadradas de 9 x 9, $\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(j)}$, $j=1,2,...,10$. que han sido presentadas desde (16.13) hasta (16.22). Como sucedía en el caso de las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(j)}$, también ahora se producen convergencias y discrepancias, que no coinciden, la mayor parte de las veces, con las opiniones vertidas sobre las relaciones anteriores. Es evidente que estas matrices son reflexivas dado que la incidencia de un elemento consigo mismo es indudablemente la unidad.

(16.13)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(1)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones, ampliación de stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora de laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones publicitarias
1	Modernización equipos	1	.7	.2	.5	.8	0	0	.1	0
2	Variaciones y ampliación stocks	0	1	0	.1	.2	0	0	.4	0
3	Capacitación factor humano	.5	.1	1	.6	.6	.5	.6	.5	.6
4	Fabricación nuevos productos	.7	.9	.7	1	0	.4	.1	5	.8
5	Mejor presentación productos	0	0	0	0	1	0	0	.3	.4
6	Creación o mejora laboratorios	.4	0	.1	.5	.5	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	.3	0	.2	0	0	1	.4	.1
8	Ampliación red comercial	.5	.8	.6	.7	.5	.2	.8	1	.9
9	Acciones publicitarias	0	0	0	.4	.3	.2	.2	.7	1

(16.14)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(2)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones, ampliación de stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora de laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones publicitarias
1	Modernización equipos	1	.7	0	.9	.7	.6	0	.4	.2
2	Variaciones y ampliación stocks	0	1	0	.6	.3	.1	.6	.5	.4
3	Capacitación factor humano	.6	.7	1	.8	.5	.6	.6	.6	.6
4	Fabricación nuevos productos	.8	1	0	1	.5	.7	.2	.8	1
5	Mejor presentación productos	0	.5	0	0	1	.4	0	.5	.7
6	Creación o mejora laboratorios	.4	.3	.6	.5	.6	1	0	0	.1
7	Mejora en medios de transporte	0	.7	0	0	0	0	1	.5	.4
8	Ampliación red comercial	.6	.9	.3	.7	.5	.4	1	1	1
9	Acciones publicitarias	0	.7	.2	.6	.7	.4	.5	.6	1

(16.15)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(3)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones, ampliación de stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora de laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones publicitarias
1	Modernización equipos	1	.8	.8	.5	.6	.7	0	.4	.2
2	Variaciones y ampliación stocks	0	1	0	0	.1	0	.6	.7	.7
3	Capacitación factor humano	.8	.6	1	.7	.7	.6	.6	.7	.7
4	Fabricación nuevos productes	.5	.9	.5	1	0	.6	0	.8	1
5	Mejor presentación productos	0	.4	0	0	1	.2	0	.3	.8
6	Creación o mejora laboratorios	.2	.4	.6	.3	.3	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	.7	0	.1	0	0	1	.4	.2
8	Ampliación red comercial	.7	.9	.4	.8	.7	.4	1	1	1
9	Acciones publicitarias	.2	.8	0	.5	.6	.4	.4	.9	1

(16.16)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(4)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones, ampliación de stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora de laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones publicitarias
1	Modernización equipos	1	.8	.6	.4	.5	.2	0	0	0
2	Variaciones y ampliación stocks	.1	1	0	0	0	.2	.6	.1	.3
3	Capacitación factor humano	.8	.3	1	.8	.8	.5	.6	.6	.4
4	Fabricación nuevos productos	.7	1	.5	1	0	.3	0	.6	1
5	Mejor presentación productos	.4	.2	.1	0	1	.2	0	.6	.9
6	Creación o mejora de laboratorios	.1	.2	.4	0	.1	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	.7	0	0	0	0	1	.6	0
8	Ampliación red comercial	.8	.9	.5	.9	.7	.6	1	1	.9
9	Acciones publiciatarias	0	.7	0	.6	.8	.2	.6	.8	1

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(5)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones y ampliación stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones Publicitarias
1	Modernización equipos	1	.9	.6	.5	.6	.4	0	.2	0
2	Variaciones y ampliación stocks	0	1	0	.1	.2	0	.5	.6	.6
3	Capacitación factor humano	.5	.4	1	.8	.6	.2	.5	.5	.4
4	Fabricación nuevos productos	1	1	.7	1	0	.2	.1	.5	.9
5	Mejor presentación productos	.2	.3	0	0	1	0	0	.4	.7
6	Creación o mejora laboratorios	0	0	.6	0	0	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	.7	0	0	0	0	1	.3	.2
8	Ampliación red comercial	.1	.9	.6	.5	.5	.3	.9	1	1
9	Acciones publicitarias	0	.2	0	.2	.1	0	.3	.4	1

(16.17)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(6)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones y ampliación stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones Publicitarias
1	Modernización equipos	1	.6	.6	.5	.6	0	0	.1	0
2	Variaciónes y ampliación stocks	0	1	0	.3	0	0	.3	.2	.7
3	Capacitación factor humano	.6	.5	1	.6	.6	.2	.3	.4	.1
4	Fabricación nuevos productos	.5	1	.4	1	0	.4	0	.8	1
5	Mejor presentación productos	0	.4	0	0	1	0	.2	.4	1
6	Creación o mejora laboratorios	0	0	.5	0	.4	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	1	0	0	0	0	1	.3	0
8	Ampliación red comercial	.6	.7	.4	.7	.3	0	1	1	1
9	Acciones publicitarias	0	.4	0	0	.3	0	.2	.3	1

(16.18)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(7)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones y ampliación stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones Publicitarias
1	Modernización equipos	1	.8	.7	.5	.5	0	0	.1	0
2	Variaciones y ampliación stocks	0	1	0	.2	0	0	.3	.6	.6
3	Capacitación factor humano	.6	.4	1	.6	.5	.2	.1	.4	.2
4	Fabricación nuevos productos	.7	1	.6	1	0	.4	.2	.7	1
5	Mejor presentación productos	.3	.4	0	0	1	0	0	.5	.7
6	Creación o mejora de laboratorios	0	0	.2	.3	.3	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	.6	0	0	0	0	1	.4	0
8	Ampliación red comercial	.2	1	.3	.6	.5	.2	.4	1	1
9	Acciones publicitarias	0	0	0	.1	0	0	0	.7	1

(16.19)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(8)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones y ampliación stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones Publicitarias
1	Modernización equipos	1	.6	.4	.3	.5	0	0	.3	0
2	Variaciones y ampliación stocks	0	1	0	.3	.4	0	.5	.6	.6
3	Capacitación factor humano	.8	.6	1	.9	.9	.6	.6	.6	.6
4	Fabricación nuevos productos	.9	1	.6	1	0	.5	.1	.8	1
5	Mejor presentación productos	.4	.4	0	0	1	.1	.1	.6	1
6	Creación o mejora de laboratorios	.1	.3	.5	.5	.6	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	.8	.1	0	0	0	1	.6	0
8	Ampliación red comercial	.3	1	.2	.7	.4	.4	1	1	1
9	Acciones publicitarias	0	.2	0	.6	.7	0	0	.9	1

(16.20)

(16.21)

	$\underset{\sim}{A}^{(9)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones y ampliación stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones Publicitarias
1	Modernización equipos	1	1	.9	.8	.9	0	0	.1	0
2	Variaciones y ampliacion stocks	0	1	0	.1	.1	0	0	.6	.6
3	Capacitación factor humano	.7	.3	1	.8	.8	.5	.5	.5	.5
4	Fabricación nuevos productos	1	1	.8	1	0	.4	0	.8	1
5	Mejor presentación productos	.3	.4	0	0	1	.4	0	.7	.9
6	Creación o mejora de laboratorios	0	.4	.3	.5	.7	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	1	0	0	0	0	1	.6	.2
8	Ampliación red comercial	.6	1	.3	.8	.9	.2	1	1	1
9	Acciones publicitarias	0	0	0	.3	.4	0	0	.4	1

(16.22)

	$\underset{\sim}{A}^{(10)}$	1 Modernización equipos	2 Variaciones y ampliación stocks	3 Capacitación factor humano	4 Fabricación nuevos productos	5 Mejor presentación productos	6 Creación o mejora laboratorios	7 Mejora en medios de transporte	8 Ampliación red comercial	9 Acciones Publicitarias
1	Modernización equipos	1	.9	.8	.6	.7	0	0	.3	0
2	Variaciones y ampliación stocks	0	1	0	.3	.6	0	.6	.9	.9
3	Capacitación factor humano	.6	.4	1	.6	.7	.4	.2	.5	.4
4	Fabricación nuevos productos	.9	1	.3	1	0	.5	0	.8	1
5	Mejor presentación productos	.2	.5	0	0	1	.2	0	.6	.9
6	Creación o mejora de laboratorios	0	.4	.3	.6	.7	1	0	0	0
7	Mejora en medios de transporte	0	.8	0	.1	0	0	1	.6	0
8	Ampliación red comercial	.5	.9	.4	.7	.9	.4	1	1	1
9	Acciones publicitarias	0	0	0	.4	.5	0	0	.8	1

Una vez obtenidas estas informaciones, hemos procedido a ordenarlas, como en el caso de las matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{(j)}$, confeccionando una matriz, la (16.23), en la que figuran para cada relación (a_j, a_k), j,k=1,2,...,9 las veces que los expertos han expresado la misma valuación.

(16.23)

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
	0	0	0	1	0	0	6	10	1	8
	.1	0	0	0	0	0	0	0	4	0
	.2	0	0	1	0	0	1	0	1	2
	.3	0	0	0	1	0	0	0	2	0
	.4	0	0	1	1	0	1	0	2	0
a_1	.5	0	0	0	5	3	0	0	0	0
	.6	0	2	3	1	3	1	0	0	0
	.7	0	2	1	0	2	1	0	0	0
	.8	0	3	2	1	1	0	0	0	0
	.9	0	2	1	1	1	0	0	0	0
	1	10	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	9	0	10	2	3	8	2	0	1
	.1	1	0	0	3	2	1	0	1	0
	.2	0	0	0	1	2	1	0	1	0
	.3	0	0	0	3	1	0	2	0	1
	.4	0	0	0	0	1	0	0	1	1
	.5	0	0	0	0	0	0	2	1	0
a_2	.6	0	0	0	1	1	0	4	4	4
	.7	0	0	0	0	0	0	0	1	2
	.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	0	10	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
	.2	0	0	0	0	0	3	1	0	1
	.3	0	2	0	0	0	0	1	0	0
	.4	0	3	0	0	0	1	0	2	3
	.5	2	1	0	0	2	3	2	4	1
a_3	.6	4	2	0	4	3	3	5	2	3
	.7	1	1	0	1	2	0	0	1	1
	.8	3	0	0	4	2	0	0	1	0
	.9	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	9	0	5	0	0
	.1	0	0	0	0	0	0	3	0	0
	.2	0	0	0	0	0	1	2	0	0
	.3	0	0	1	0	0	1	0	0	0
	.4	0	0	1	0	0	4	0	0	0
	.5	2	0	2	0	1	2	0	2	0
a_4	.6	0	0	2	0	0	1	0	1	0
	.7	3	0	2	0	0	1	0	1	0
	.8	1	0	1	0	0	0	0	6	1
	.9	2	2	0	0	0	0	0	0	1
	1	2	8	0	10	0	0	0	0	8
	0	4	1	9	10	0	4	8	0	0
	.1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
	.2	2	1	0	0	0	3	1	0	0
a_5	.3	2	1	0	0	0	0	0	2	0
	.4	2	5	0	0	0	2	0	2	1
	.5	0	2	0	0	0	0	0	2	0
	.6	0	0	0	0	0	0	0	3	0
	.7	0	0	0	0	0	0	0	1	3
	.8	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	.9	0	0	0	0	0	0	0	0	3
	1	0	0	0	0	10	0	0	0	2

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
	0	5	4	0	3	1	0	10	10	9
	.1	2	0	1	0	1	0	0	0	1
	.2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	.3	0	2	2	2	2	0	0	0	0
	.4	2	3	1	0	1	0	0	0	0
	.5	0	0	2	4	1	0	0	0	0
a_6	.6	0	0	3	1	2	0	0	0	0
	.7	0	0	0	0	2	0	0	0	0
	.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	10	0	0	0
	0	10	0	9	7	10	10	0	0	5
	.1	0	0	1	2	0	0	0	0	1
	.2	0	0	0	1	0	0	0	0	3
	.3	0	1	0	0	0	0	0	2	0
	.4	0	0	0	0	0	0	0	3	1
a_7	.5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	.6	0	1	0	0	0	0	0	4	0
	.7	0	4	0	0	0	0	0	0	0
	.8	0	2	0	0	0	0	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	2	0	0	0	0	10	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	.1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	.2	1	0	1	0	0	3	0	0	0
	.3	1	0	3	0	1	1	0	0	0
	.4	0	0	3	0	1	4	1	0	0
a_8	.5	2	0	1	1	4	0	0	0	0
	.6	3	0	2	1	0	1	0	0	0
	.7	1	1	0	5	2	0	0	0	0
	.8	1	1	0	2	0	0	1	0	0
	.9	0	5	0	1	2	0	1	0	2
	1	0	3	0	0	0	0	7	10	8
	0	9	4	9	1	1	6	4	0	0
	.1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	.2	1	2	1	1	0	2	2	0	0
	.3	0	0	0	1	2	0	1	1	0
	.4	0	1	0	2	1	2	1	2	0
a_9	.5	0	0	0	1	1	0	1	0	0
	.6	0	0	0	3	1	0	1	1	0
	.7	0	2	0	0	2	0	0	2	0
	.8	0	1	0	0	1	0	0	2	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0	2	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10

A partir de estos datos, y teniendo en cuenta la necesidad de relativizarlos se procede a su acumulación partiendo, evidentemente, para cada relación de incidencia de la mayor valuación hasta la menor, tal como se ha hecho hasta ahora.

Se obtiene así la matriz aleatoria borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ presentada en (16.24), la cual permite ver por la simple observación de la acumulación de probabilidades cómo se reunen o separan las opiniones de los expertos sobre cada relación. Así, como no podía ser de otra manera, las columnas (a_j, a_j),j=1,2,...,9 están formadas de 1, dado que todas las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(j)}$ son reflexivas.

Si se toma, por ejemplo, la relación (a_1, a_7) incidencia de la ''modernización de equipos'' sobre la ''mejora en medios de transporte'' se puede comprobar que existe una total coincidencia entre todos los expertos en pensar que no existe incidencia alguna, lo que se refleja en la columna correspondiente por el hecho de que en todas las valuaciones de 1 hasta 0.1 aparece una probabilidad acumulada nula y que en la valuación 0 aparece la unidad.

En otras relaciones, por ejemplo la (a_1, a_3) incidencia de la ''modernización de equipos'' sobre la ''capacitación del factor humano'' aparecen notables discrepancias que se reflejan en la matriz por el hecho de que la acumulación de probabilidades a medida que desciende la intensidad de la incidencia se produce de una manera lenta (exceptuando el paso de una incidencia de 0.7 a 0.6 en donde se produce la coincidencia de 3 expertos).

El análisis de los procesos de acumulación de probabilidad al ir descendiendo en el grado de incidencia estimada para cada relación, permite una visión muy completa de la opinión general que los expertos han manifestado en torno a este tipo de relaciones.

(16.24)

$\underset{\sim}{\mathcal{A}} =$

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	.9	1	1	.4	0	.9	.2
	.2	1	1	.9	1	1	.4	0	.5	.2
	.3	1	1	.8	1	1	.3	0	.4	0
	.4	1	1	.8	.9	1	.3	0	.2	0
	.5	1	1	.7	.8	1	.2	0	0	0
	.6	1	1	.7	.3	.7	.2	0	0	0
	.7	1	.8	.4	.2	.4	.1	0	0	0
	.8	1	.6	.3	.2	.2	0	0	0	0
	.9	1	.3	.1	.1	.1	0	0	0	0
	1	1	.1	0	0	0	0	0	0	0
a_2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.1	1	0	.8	.7	.2	.8	1	.9
	.2	0	1	0	.5	.5	.1	.8	.9	.9
	.3	0	1	0	.4	.3	0	.8	.8	.9
	.4	0	1	0	.1	.2	0.	.6	.8	.8
	.5	0	1	0	.1	.1	0	.6	.7	.7
	.6	0	1	0	.1	.1	0	.4	.6	.7
	.7	0	1	0	0	0	0	0	.2	.3
	.8	0	1	0	0	0	0	0	.1	.1
	.9	0	1	0	0	0	0	0	.1	.1
	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
a_3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	.9	1	1	1	1	.9	1	.9
	.3	1	.9	1	1	1	.7	.8	1	.8
	.4	1	.7	1	1	1	.7	.7	1	.8
	.5	1	.4	1	1	1	.6	.7	.8	.5
	.6	.8	.3	1	1	.8	.3	.5	.4	.4
	.7	.4	.1	1	.6	.5	0	0	.2	.1
	.8	.3	0	1	.5	.3	0	0	.1	0
	.9	0	0	1	.1	.1	0	0	0	0
	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a_4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	.9	1	.1	1	.5	1	1
	.2	1	1	.9	1	.1	1	.2	1	1
	.3	1	1	.9	1	.1	.9	0	1	1
	.4	1	1	.8	1	.1	.8	0	1	1
	.5	1	1	.7	1	.1	.4	0	1	1
	.6	.8	1	.5	1	0	.2	0	.8	1
	.7	.8	1	.3	1	0	.1	0	.7	1
	.8	.5	1	.1	1	0	0	0	.6	1
	.9	.4	1	0	1	0	0	0	0	.9
	1	.2	.8	0	1	0	0	0	0	.8
a_5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.6	.9	.1	0	1	.6	.2	1	1
	.2	.6	.9	0	0	1	.5	.1	1	1
	.3	.4	.8	0	0	1	.2	0	1	1
	.4	.2	.7	0	0	1	.2	0	.8	1
	.5	0	.2	0	0	1	0	0	.6	.9
	.6	0	0	0	0	1	0	0	.4	.9
	.7	0	0	0	0	1	0	0	.1	.9
	.8	0	0	0	0	1	0	0	0	.6
	.9	0	0	0	0	1	0	0	0	.5
	1	0	0	0	0	1	0	0	0	.2

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_6	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.5	.6	1	.7	.9	1	0	0	.1
	.2	.3	.6	.9	.7	.8	1	0	0	0
	.3	.2	.5	.8	.7	.8	1	0	0	0
	.4	.2	.3	.6	.5	.6	1	0	0	0
	.5	0	0	.5	.5	.5	1	0	0	0
	.6	0	0	.3	.1	.4	1	0	0	0
	.7	0	0	0	0	.2	1	0	0	0
	.8	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
a_7	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	0	1	.1	.3	0	0	1	1	.5
	.2	0	1	0	.1	0	0	1	1	.4
	.3	0	1	0	0	0	0	1	1	.1
	.4	0	.9	0	0	0	0	1	.8	.1
	.5	0	.9	0	0	0	0	1	.5	0
	.6	0	.9	0	0	0	0	1	.4	0
	.7	0	.8	0	0	0	0	1	0	0
	.8	0	.4	0	0	0	0	1	0	0
	.9	0	.2	0	0	0	0	1	0	0
	1	0	.2	0	0	0	0	1	0	0
a_8	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	.9	1	1	1
	.2	.9	1	1	1	1	.9	1	1	1
	.3	.8	1	.9	1	1	.6	1	1	1
	.4	.7	1	.6	1	.9	.5	1	1	1
	.5	.7	1	.3	1	.8	.1	.9	1	1
	.6	.5	1	.2	.9	.4	.1	.9	1	1
	.7	.2	1	0	.8	.4	0	.9	1	1
	.8	.1	.9	0	.3	.2	0	.9	1	1
	.9	0	.8	0	.1	.2	0	.8	1	1
	1	0	.3	0	0	0	0	.7	1	.8
a_9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.1	.6	.1	.9	.9	.4	.6	1	1
	.2	.1	.6	.1	.8	.8	.4	.6	1	1
	.3	0	.4	0	.7	.8	.2	.4	1	1
	.4	0	.4	0	.6	.6	.2	.3	.9	1
	.5	0	.3	0	.4	.5	0	.2	.7	1
	.6	0	.3	0	.3	.4	0	.1	.7	1
	.7	0	.3	0	0	.3	0	0	.6	1
	.8	0	.1	0	0	.1	0	0	.4	1
	.9	0	0	0	0	0	0	0	.2	1
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Finalmente, y en esta primera fase de obtención y ''ordenación'' de informaciones, se ha solicitado a los 10 expertos que de nuevo expresen su opinión en torno al problema planteado pero esta vez con las posibles relaciones existentes entre los ''efectos'' de la matriz originaria $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ consigo mismos y con los demás ''efectos'', es decir del ''aumento de las ventas'' sobre el ''aumento de las ventas'', sobre la ''variación de los precios de venta'', etc... de tal manera que se pueden conseguir 10 matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}^{(j)}$. Estas matrices serán cuadradas de 7 x 7 y reflexivas.

La respuesta por parte de los expertos nos permite presentar estas matrices desde (16.25) hasta (16.34).

	$\underset{\sim}{B}^{(1)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Aumento ventas	1	.7	.8	1	0	0	0
2	Variación precios venta	1	1	.9	.5	.5	0	0
3	Posición Competitiva	1	.2	1	1	0	.2	0
4	Modificación cuota de mercado	1	.6	.3	1	0	.4	0
5	Calidad de los productos	1	1	.8	0	1	0	0
6	Distribución territorial	1	0	.7	.8	0	1	.9
7	Seriedad en los suministros	1	0	.4	0	0	0	1

(16.25)

	$\underset{\sim}{B}^{(2)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Aumento ventas	1	.6	1	1	0	.4	0
2	Variación precios venta	1	1	1	.3	.1	0	.1
3	Posición Competitiva	.8	.3	1	.6	0	.6	0
4	Modificación cuota de mercado	1	.2	.5	1	0	0	0
5	Calidad de los productos	1	1	.9	.1	1	.1	0
6	Distribucción territorial	1	0	.9	.6	0	1	1
7	Seriedad en los suministros	.8	0	.2	.1	0	0	1

(16.26)

	$\underset{\sim}{B}^{(3)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Aumento ventas	1	.5	.7	1	0	.5	0
2	Variación precios venta	1	1	.9	.4	.1	0	0
3	Posición Competitiva	1	.2	1	1	0	.6	0
4	Modificación cuota de mercado	.9	0	.6	1	0	.5	0
5	Calidad de los productos	1	1	.9	.6	1	0	0
6	Distribucióón territorial	1	.1	1	.8	0	1	.8
7	Seriedad en los suministros	1	0	.5	1	0	.1	1

(16.27)

	$\underset{\sim}{B}^{(4)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Aumento ventas	1	.6	.5	1	0	.7	0
2	Variación precios venta	1	1	1	.8	.2	0	.4
3	Posición Competitiva	.9	.1	1	1	0	0	0
4	Modificación cuota de mercado	.9	0	.5	1	0	.7	0
5	Calidad de los productos	.9	.6	1	.3	1	0	0
6	Distribución territorial	1	0	1	.7	0	1	1
7	Seriedad en los suministros	.8	.4	.6	.1	0	.4	1

(16.28)

		1	2	3	4	5	6	7
	$\underset{\sim}{B}^{(5)}$	Augment vendes	Variació preus venda	Posició competitiva	Modificació quota de mercat	Qualitat dels productes	Distribució territorial	Serietat en els subministraments
1	Augment vendes	1	.8	.5	.7	0	0	0
2	Variació preus venda	1	1	1	.5	.2	0	0
3	Posició Competitiva	.8	.1	1	1	0	.6	0
4	Modificació quota de mercat	.3	.2	.3	1	0	.1	.1
5	Qualitat dels productes	.8	1	1	.6	1	.6	0
6	Distribució territorial	1	0	1	.1	0	1	.7
7	Serietat en els subministraments	.8	.2	.5	.2	0	.6	1

(16.29)

		1	2	3	4	5	6	7
	$\underset{\sim}{B}^{(6)}$	Augment vendes	Variació preus venda	Posició competitiva	Modificació quota de mercat	Qualitat dels productes	Distribució territorial	Serietat en els subministraments
1	Augment vendes	1	.4	.1	.7	0	.6	0
2	Variació preus venda	1	1	.9	.2	.7	0	.4
3	Posició Competitiva	1	.5	1	1	0	.3	0
4	Modificació quota de mercat	.6	.5	.6	1	0	.3	0
5	Qualitat dels productes	1	1	1	.7	1	0	0
6	Distribució territorial	1	0	1	.6	0	1	.8
7	Serietat en els subministraments	.7	.2	.6	.1	0	0	1

(16.30)

		1	2	3	4	5	6	7
	$\underset{\sim}{B}^{(7)}$	Augment vendes	Variació preus venda	Posició competitiva	Modificació quota de mercat	Qualitat dels productes	Distribució territorial	Serietat en els subministraments
1	Augment vendes	1	.6	.9	1	0	.1	0
2	Variació preus venda	1	1	.9	.6	.5	0	.6
3	Posició Competitiva	1	.1	1	1	0	0	0
4	Modificació quota de mercat	.6	0	.5	1	0	.1	.1
5	Qualitat dels productes	1	.9	.9	0	1	0	0
6	Distribució territorial	1	0	1	.4	0	1	.9
7	Serietat en els subministraments	.8	0	.6	.1	0	0	1

(16.31)

		1	2	3	4	5	6	7
	$\underset{\sim}{B}^{(8)}$	Augment vendes	Variació preus venda	Posició competitiva	Modificació quota de mercat	Qualitat dels productes	Distribució territorial	Serietat en els subministraments
1	Augment vendes	1	.8	.6	1	.1	.6	0
2	Variació preus venda	1	1	.8	.8	.7	.1	0
3	Posició Competitiva	1	.4	1	1	0	.4	0
4	Modificació quota de mercat	.4	.3	.5	1	0	0	0
5	Qualitat dels productes	1	.8	.9	.3	1	.5	0
6	Distribució territorial	1	0	1	.5	0	1	.6
7	Serietat en els subministraments	.7	.1	.5	.1	0	0	1

(16.32)

	$\underset{\sim}{\mathcal{B}}^{(9)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Aumento ventas	1	.7	.9	1	0	.1	0
2	Variación precios venta	1	1	.9	.3	.4	0	.4
3	Posición Competitiva	.9	.2	1	1	0	.2	0
4	Modificación cuota de mercado	.3	.3	.4	1	0	.4	0
5	Calidad de los productos	1	.8	1	.6	1	.2	0
6	Distribución territorial	1	0	.9	.5	0	1	.6
7	Seriedad en los suministros	.8	.4	.6	.1	0	0	1

(16.33)

	$\underset{\sim}{\mathcal{B}}^{(10)}$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Aumento ventas	1	.8	.4	1	0	.7	0
2	Variación precios venta	1	1	1	.4	.3	0	.3
3	Posición Competitiva	1	.4	1	1	0	.7	0
4	Modificación cuota de mercado	.4	.1	.6	1	0	.5	0
5	Calidad de los productos	1	1	1	.7	1	.3	0
6	Distribución territorial	1	.2	1	.7	0	1	.7
7	Seriedad en los suministros	.7	.4	.6	.3	0	0	1

(16.34)

Como se ha hecho en las informaciones relativas a las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(j)}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(j)}$, también ahora se procede a reunir los resultados obtenidos en una nueva matriz, la presentada en (16.35), que refleja para cada relación (b_j, b_k),$j,k=1,2,...,7$ el número de expertos que han coincidido en sus valuaciones.

Las mismas consideraciones realizadas anteriormente son, en general, válidas para esta ocasión.

(16.35)

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	0	0	0	0	0	9	2	10
	.1	0	0	1	0	1	2	0
	.2	0	0	0	0	0	0	0
	.3	0	0	0	0	0	0	0
	.4	0	1	1	0	0	1	0
	.5	0	1	2	0	0	1	0
	.6	0	3	1	0	0	2	0
	.7	0	2	1	2	0	2	0
	.8	0	3	1	0	0	0	0
	.9	0	0	2	0	0	0	0
	1	10	0	1	8	0	0	0
b_2	0	0	0	0	0	0	9	4
	.1	0	0	0	0	2	1	1
	.2	0	0	0	1	2	0	0
	.3	0	0	0	2	1	0	1
	.4	0	0	0	2	1	0	3
	.5	0	0	0	2	2	0	0
	.6	0	0	0	1	0	0	1
	.7	0	0	0	0	2	0	0
	.8	0	0	1	2	0	0	0
	.9	0	0	5	0	0	0	0
	1	10	10	4	0	0	0	0
b_3	0	0	0	0	0	10	2	10
	.1	0	3	0	0	0	0	0
	.2	0	3	0	0	0	2	0
	.3	0	1	0	0	0	1	0
	.4	0	2	0	0	0	1	0
	.5	0	1	0	0	0	0	0
	.6	0	0	0	1	0	3	0
	.7	0	0	0	0	0	1	0
	.8	2	0	0	0	0	0	0
	.9	2	0	0	0	0	0	0
	1	6	0	10	9	0	0	0
b_4	0	0	3	0	0	10	2	8
	.1	0	1	0	0	0	2	2
	.2	0	2	0	0	0	0	0
	.3	2	2	2	0	0	1	0
	.4	2	0	1	0	0	2	0
	.5	0	1	4	0	0	2	0
	.6	2	1	3	0	0	0	0
	.7	0	0	0	0	0	1	0
	.8	0	0	0	0	0	0	0
	.9	2	0	0	0	0	0	0
	1	2	0	0	10	0	0	0

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_5	0	0	0	0	2	0	5	10
	.1	0	0	0	1	0	1	0
	.2	0	0	0	0	0	1	0
	.3	0	0	0	2	0	1	0
	.4	0	0	0	0	0	0	0
	.5	0	0	0	0	0	1	0
	.6	0	1	0	3	0	1	0
	.7	0	0	0	2	0	0	0
	.8	1	2	1	0	0	0	0
	.9	1	1	4	0	0	0	0
	1	8	6	5	0	10	0	0
b_6	0	0	8	0	0	10	0	0
	.1	0	1	0	1	0	0	0
	.2	0	1	0	0	0	0	0
	.3	0	0	0	0	0	0	0
	.4	0	0	0	1	0	0	0
	.5	0	0	0	2	0	0	0
	.6	0	0	0	2	0	0	2
	.7	0	0	1	2	0	0	2
	.8	0	0	0	2	0	0	2
	.9	0	0	2	0	0	0	2
	1	10	0	7	0	0	10	2
b_7	0	0	4	0	1	10	7	0
	.1	0	1	0	7	0	1	0
	.2	0	2	1	1	0	0	0
	.3	0	0	0	1	0	0	0
	.4	0	3	1	0	0	1	0
	.5	0	0	3	0	0	0	0
	.6	0	0	5	0	0	1	0
	.7	3	0	0	0	0	0	0
	.8	5	0	0	0	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	0	0	0	0	0	10

A partir de la matriz (16.35) se obtiene fácilmente la matriz aleatoria borrosa $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}$ operando de igual manera como se ha hecho para hallar $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$. En este caso el proceso de acumulación proporciona, para cada relación (b_j,b_k) cuando $j,k=1,2,...,7$, la probabilidad de que la incidencia a cada nivel no sea inferior a la valuación considerada. La matriz aleatoria borrosa $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}$ se presenta en (16.36).

Creemos innecesario repetir las consideraciones en torno a la significación de las cifras que aparecen en cada relación de incidencia, ya que tendrían un sentido paralelo a las realizadas anteriormente. Dejamos así al lector la libertad de realizar, si lo estima oportuno, cuantas reflexiones pueda sugerirle el estudio numérico de $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}$.

(16.36) $\underset{\sim}{B} =$

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	.1	.8	0
	.2	1	1	.9	1	0	.6	0
	.3	1	1	.9	1	0	.6	0
	.4	1	1	.9	1	0	.6	0
	.5	1	.9	.8	1	0	.5	0
	.6	1	.8	.6	1	0	.4	0
	.7	1	.5	.5	1	0	.2	0
	.8	1	.3	.4	.8	0	0	0
	.9	1	0	.3	.8	0	0	0
	1	1	0	.1	.8	0	0	0
b_2	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	.1	.6
	.2	1	1	1	1	.8	0	.5
	.3	1	1	1	.9	.6	0	.5
	.4	1	1	1	.7	.5	0	.4
	.5	1	1	1	.5	.4	0	.1
	.6	1	1	1	.3	.2	0	.1
	.7	1	1	1	.2	.2	0	0
	.8	1	1	1	.2	0	0	0
	.9	1	1	.9	0	0	0	0
	1	1	1	.4	0	0	0	0
b_3	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	0	.8	0
	.2	1	.7	1	1	0	.8	0
	.3	1	.4	1	1	0	.6	0
	.4	1	.3	1	1	0	.5	0
	.5	1	.1	1	1	0	.4	0
	.6	1	0	1	1	0	.4	0
	.7	1	0	1	.9	0	.1	0
	.8	1	0	1	.9	0	0	0
	.9	.8	0	1	.9	0	0	0
	1	.6	0	1	.9	0	0	0
b_4	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.7	1	1	0	.8	.2
	.2	1	.6	1	1	0	.6	0
	.3	1	.4	1	1	0	.6	0
	.4	.8	.2	.8	1	0	.5	0
	.5	.6	.2	.7	1	0	.3	0
	.6	.6	.1	.3	1	0	.1	0
	.7	.4	0	0	1	0	.1	0
	.8	.4	0	0	1	0	0	0
	.9	.4	0	0	1	0	0	0
	1	.2	0	0	1	0	0	0

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_5	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	.8	1	.5	0
	.2	1	1	1	.7	1	.4	0
	.3	1	1	1	.7	1	.3	0
	.4	1	1	1	.5	1	.2	0
	.5	1	1	1	.5	1	.2	0
	.6	1	1	1	.5	1	.1	0
	.7	1	.9	1	.2	1	0	0
	.8	1	.9	1	0	1	0	0
	.9	.9	.7	.9	0	1	0	0
	1	.8	.6	.5	0	1	0	0
b_6	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.2	1	1	0	1	1
	.2	1	.1	1	.9	0	1	1
	.3	1	0	1	.9	0	1	1
	.4	1	0	1	.9	0	1	1
	.5	1	0	1	.8	0	1	1
	.6	1	0	1	.6	0	1	1
	.7	1	0	1	.4	0	1	.8
	.8	1	0	.9	.2	0	1	.6
	.9	1	0	.9	0	0	1	.4
	1	1	0	.7	0	0	1	.2
b_7	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.6	1	.9	0	.3	1
	.2	1	.5	1	.2	0	.2	1
	.3	1	.3	.9	.1	0	.2	1
	.4	1	.3	.9	0	0	.2	1
	.5	1	0	.8	0	0	.1	1
	.6	1	0	.5	0	0	.1	1
	.7	1	0	0	0	0	0	1
	.8	.7	0	0	0	0	0	1
	.9	.2	0	0	0	0	0	1
	1	.2	0	0	0	0	0	1

Con objeto de conseguir los efectos acumulados de 1.ª y 2.ª generación será necesario obtener (véanse epígrafes 9 y 11) $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*=\underset{\sim}{\mathfrak{A}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{B}}$ lo cual será posible si operamos nivel a nivel.

Para ello se consideran las matrices aleatorias borrosas (16.12), (16.24) y (16.36) y se hallan las 11 matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\alpha$, las 11 matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{A}}_\alpha$ y las 11 matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}_\alpha$, para α=1,0.9,...,0.1,0 y se realizan las correspondientes convoluciones maxmin, nivel a nivel, primero para obtener $\underset{\sim}{\mathfrak{A}}_\alpha \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\alpha$, y después la convolución de $\underset{\sim}{\mathfrak{A}}_\alpha \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\alpha$ con $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}_\alpha$ para llegar a conseguir, nivel a nivel, $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*$.

Al descomponer las matrices aleatorias borrosas por niveles (en este caso 11) no hacemos otra cosa que presentar *para cada grado de incidencia estimado* cual es la "probabilidad acumulada" de acuerdo con las opiniones recogidas de los expertos. Por lo tanto, cuanto mayor sea el nivel α que se considere, más interés tendrá la incidencia acumulada de 1.ª y 2.ª generación.

Hallemos, pues, nivel a nivel, la matriz $\underset{\sim}{\mathfrak{A}}_\alpha \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\alpha$ empezando por α=1,0.9,..., hasta α=0.1, dado que al nivel α=0 la totalidad de las casillas de las matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{A}}_0$ y $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_0$ estarán formadas por la unidad. En (16.37) se detalla, nivel a nivel, la obtención de las matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{A}}_\alpha \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\alpha$.

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_1 \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_1 =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	.1	0	0	.6	0	.1
a_2	0	0	0	0	0	0	.1
a_3	0	0	0	0	.1	0	.5
a_4	.9	.1	.2	.1	.2	0	.1
a_5	.2	0	0	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	.7	0	0
a_7	0	0	0	0	0	.6	.1
a_8	.7	0	.6	0	0	1	.1
a_9	.6	0	0	0	0	0	0

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.9} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.9} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.1	.2	.1	.1	.9	0	.3
a_2	.1	0	.1	.1	0	.1	.4
a_3	.2	.1	.3	.1	.2	0	.7
a_4	.1	.2	.4	.4	.4	0	.4
a_5	.5	.1	.4	.4	0	0	0
a_6	0	.1	0	0	1	0	0
a_7	0	0	0	0	0	.7	.3
a_8	.8	.1	.7	.4	0	1	.4
a_9	.8	0	.4	.4	0	.2	.2

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.8} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.8} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.3	.4	.3	.2	1	.2	.6
a_2	.1	.1	.1	.1	0	.1	.7
a_3	.6	.3	.5	.5	.8	.2	.8
a_4	1	.4	.8	.7	.5	.6	.7
a_5	.6	.5	.6	.6	0	0	0
a_6	0	.3	0	0	1	0	0
a_7	.2	0	.1	0	0	.9	.6
a_8	1	.4	.8	.7	.1	1	.7
a_9	.9	.4	.6	.7	0	.4	.3

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.7} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.7} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.4	.7	.4	.2	1	.2	.7
a_2	.3	.3	.3	.3	0	.2	.7
a_3	.8	.5	.6	.6	.8	.2	1
a_4	1	.7	1	.9	.8	.7	.7
a_5	.9	.7	.9	.9	0	.1	.1
a_6	.1	.5	.1	0	1	0	0
a_7	.4	.2	.2	.1	0	1	.8
a_8	1	.6	1	.9	.2	1	.8
a_9	1	.6	.9	.9	0	.6	.3

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.6} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.6} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.7	.7	.7	.5	1	.3	.9
a_2	.7	.7	.7	.7	0	.6	.9
a_3	1	.8	1	.9	.9	.5	1
a_4	1	.8	1	.9	.8	.8	.9
a_5	.9	1	.9	.9	0	.4	.4
a_6	.4	.7	.3	.3	1	.2	.3
a_7	.5	.5	.4	.4	0	1	1
a_8	1	.8	1	1	.5	1	.9
a_9	1	.8	.9	.9	0	.7	.5

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.5} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.5} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	.8	.8	1	.4	1
a_2	.7	.7	.7	.7	.5	.7	1
a_3	1	1	1	1	1	.8	1
a_4	1	.9	1	1	1	1	1
a_5	1	1	.9	.9	.2	.6	.5
a_6	.5	.7	.5	.5	1	.3	.5
a_7	.7	.6	.5	.5	.5	1	1
a_8	1	.8	1	1	.7	1	1
a_9	1	.8	1	.9	.3	.7	.5

(16.37)

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.4} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.4} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	.9	.9	1	.5	1
a_2	1	.8	.8	.8	.7	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	.9	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.7	.8	.7
a_6	.6	.9	.6	.6	1	.5	.6
a_7	.9	.7	.8	.8	.7	1	1
a_8	1	.9	1	1	.7	1	1
a_9	1	.9	1	1	.4	.9	.6

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.3} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.3} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.5	1
a_2	1	.9	.9	.9	.8	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.8	1	.8
a_6	8	1	.8	.8	1	.5	.8
a_7	1	.7	1	1	.8	1	1
a_8	1	1	1	1	.9	1	1
a_9	1	1	1	1	.4	1	.6

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.2} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.2} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.6	.1
a_2	1	.9	1	.9	.9	.9	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.9	1	.9
a_6	.9	1	.9	.9	1	.6	.9
a_7	1	.8	1	1	.9	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	.6	1	.7

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.1} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.1} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.9	1
a_2	1	.9	1	1	.9	1	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.9	1	.9
a_6	1	1	1	1	1	.8	1
a_7	1	.9	1	1	.9	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	.6	1	.8

Como puede observarse, a medida que se va descendiendo de nivel, la acumulación de probabilidad es cada vez mayor para todos los elementos de las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\alpha$ y $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\alpha$ y por consiguiente para los de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\alpha \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\alpha$. En este sentido es concluyente el resultado que aparece en la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.1} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.1}$, en donde predominan los 1 y 0.9 con un único 0.6 en la relación (a_9, b_5), ''acciones publicitarias'' sobre la ''calidad del producto''.

Hay que tener en cuenta que estos resultados son parciales ya que sólo se han vertido en ellos una parte de los efectos de 2.ª generación, los debidos a la incidencia de cada uno de los medios consigo mismos y con los elementos que representan la imagen comercial de la empresa, pero no los efectos de estos elementos consigo mismos y con los demás.

Para ello será necesario realizar la convolución, nivel a nivel, de las matrices obtenidas $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\alpha \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\alpha$ con cada una de las $\underset{\sim}{\mathbf{B}}_\alpha$. A continuación se presentan los resultados obtenidos, en (16.38).

(16.38)

$\underset{\sim}{A}_1 \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_1 \circ \underset{\sim}{B}_1 =$ $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_1^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.6	.6	.5	0	.6	0	.1
a_2	.1	0	0	0	0	0	.1
a_3	.2	.1	.1	0	.1	0	.5
a_4	.9	.2	.2	.8	.2	0	.1
a_5	.2	0	.1	.2	0	0	0
a_6	.7	.6	.5	0	.7	0	0
a_7	.6	0	.6	0	0	.6	.2
a_8	1	0	.7	.7	0	1	.2
a_9	.6	0	.1	.6	0	0	0

$\underset{\sim}{A}_{0.9} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.9} \circ \underset{\sim}{B}_{0.9} =$ $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.9}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.9	.7	.9	.1	.9	0	.3
a_2	.2	0	.1	.1	0	.1	.4
a_3	.3	.2	.3	.3	.2	0	.7
a_4	1	.4	.4	.8	.4	0	.4
a_5	.5	.1	.4	.5	0	0	0
a_6	.9	.7	.9	0	1	0	0
a_7	.7	0	.7	0	0	.7	.4
a_8	1	.1	.9	.8	0	1	.4
a_9	.8	0	.4	.8	0	.2	.2

$\underset{\sim}{A}_{0.8} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.8} \circ \underset{\sim}{B}_{0.8} =$ $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.8}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	.9	1	.3	1	.2	.6
a_2	.7	.1	.1	.1	0	.1	.7
a_3	.8	.8	.8	.6	.8	.2	.8
a_4	1	.5	.8	.8	.5	.6	.7
a_5	.6	.5	.6	.6	0	0	0
a_6	1	.9	1	.2	1	0	0
a_7	.9	.2	.9	.2	0	.9	.6
a_8	1	.4	.9	.8	.1	1	.7
a_9	.9	.4	.6	.8	0	.4	.4

$\underset{\sim}{A}_{0.7} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.7} \circ \underset{\sim}{B}_{0.7} =$ $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.7}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	.9	1	.4	1	.2	.7
a_2	.7	.3	.3	.3	.2	.2	.7
a_3	1	.8	.8	.8	.8	.2	1
a_4	1	.8	1	1	.8	.7	.7
a_5	.9	.7	.9	.9	.2	.2	.1
a_6	1	.9	1	.2	1	.1	0
a_7	1	.4	1	.4	.2	1	.8
a_8	1	.6	1	1	.2	1	.8
a_9	1	.6	.9	1	.2	.6	.6

$\underset{\sim}{A}_{0.6} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.6} \circ \underset{\sim}{B}_{0.6} =$ $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.6}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	.7	1	.4	.9
a_2	.9	.7	.7	.7	.2	.6	.9
a_3	1	.9	1	1	.9	.5	1
a_4	1	.8	1	1	.8	.8	.9
a_5	1	1	1	.9	.2	.4	.4
a_6	1	1	1	.5	1	.4	.3
a_7	1	.5	1	.6	.2	1	1
a_8	1	.8	1	1	.5	1	1
a_9	1	.8	.9	1	.2	.7	.7

$\underset{\sim}{A}_{0.5} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.5} \circ \underset{\sim}{B}_{0.5} =$ $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.5}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.5	1
a_2	1	.7	.8	.7	.5	.7	1
a_3	1	1	1	1	1	.8	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.4	.6	.6
a_6	1	1	1	.5	1	.5	.5
a_7	1	.7	1	.8	.5	1	1
a_8	1	.9	1	1	.7	1	1
a_9	1	.9	1	1	.4	.7	.7

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.4}^{*}$

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.4} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.4} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}_{0.4} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.6	1
a_2	1	1	.9	1	.7	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.7	.8	.8
a_6	1	1	1	.7	1	.6	.6
a_7	1	.9	1	.9	.7	1	1
a_8	1	1	1	1	.7	1	1
a_9	1	1	1	1	.5	.9	.9

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.3}^{*}$

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.3} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.3} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}_{0.3} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.6	1
a_2	1	1	.9	1	.8	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.8	1	1
a_6	1	1	1	.9	1	.6	.8
a_7	1	1	1	1	.8	1	1
a_8	1	1	1	1	.9	1	1
a_9	1	1	1	1	.6	1	1

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.2}^{*}$

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.2} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.2} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}_{0.2} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.8	1
a_2	1	1	1	1	.9	.9	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.9	1	1
a_6	1	1	1	1	1	.8	.9
a_7	1	1	1	1	.9	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	.8	1	1

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.1}^{*}$

$\underset{\sim}{\mathcal{A}}_{0.1} \circ \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.1} \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}_{0.1} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.9	1
a_2	1	1	1	1	.9	1	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	1	1	1
a_6	1	1	1	1	1	.8	1
a_7	1	1	1	1	.9	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	1	1

Obtenidos ya, mediante el proceso propuesto, los efectos acumulados de primera y segunda generación, nos hallamos en disposición de hallar los efectos olvidados teniendo en cuenta la opinión agregada de los expertos.

Para ello se pueden seguir varios caminos que, aún cuando darían lugar a resultados numéricos distintos, convergerían, en cierto modo, en aquellos efectos olvidados que poseen un mayor grado de incidencia.

Vamos a utilizar, en esta ocasión, el método sencillo cuya base se halla en lo expuesto desde (11.35) hasta (11.42). Para ello se debe obtener la esperanza matemática de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}$ y la de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$.

Ponemos de manifiesto seguidamente los cálculos para las primeras casillas de las matrices $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ y $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*})$. Así:

En relación con la matriz $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ se tendrá:

$$(16.39)\quad \varepsilon_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(a_1, b_1) = \frac{1}{10}\ (.1 + .1 + .3 + .3 + .6 + .8 + 1 + 1 + 1) = 0.52$$

$$(16.40)\quad \varepsilon_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(a_1, b_2) = \frac{1}{10}\ (.1 + .2 + .4 + .7 + .7 + .9 + .9 + 1 + 1 + 1) = 0.69$$

$$(16.41)\quad \varepsilon_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}}(a_1, b_3) = \frac{1}{10}\ (.2 + .3 + .4 + .4 + .5 + .8 + .8 + .9) = 0.43$$

....

En relación con la matriz $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*$ será:

$$(16.42)\quad \varepsilon_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*}(a_1, b_1) = \frac{1}{10}\ (.6 + .9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 0.95$$

$$(16.43)\quad \varepsilon_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*}(a_1, b_2) = \frac{1}{10}\ (.6 + .7 + .9 + .9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 0.91$$

$$(16.44)\quad \varepsilon_{\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*}(a_1, b_3) = \frac{1}{10}\ (.5 + .9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 0.94$$

....

Si se opera de esta manera para todos los pares de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ y de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*$ se obtendrán las siguientes matrices.

		1	2	3	4	5	6	7
	$\varepsilon(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$	Aumento ventas	Variación precio venta	Posición Competitiva	Modificación cuota mercado	Calidad de los productos	Distribución territorial	Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.52	.69	.43	.27	.95	.01	.08
2	Variaciones y ampliación stocks	.54	.44	.47	.30	.38	.30	.78
3	Capacitación factor humano	.76	.50	.65	.49	.76	.33	.90
4	Fabricación nuevos productos	.99	.13	.83	.75	.04	.23	0
5	Mejor presentación productos	.60	.73	.45	.35	0	.06	0
6	Creación o mejora de laboratorios	.22	.62	.30	.19	.97	.01	.06
7	Mejora en medios de transporte	.55	.15	.38	.20	0	.92	.78
8	Ampliación red comercial	.95	.21	.91	.69	0	1	.45
9	Acciones publicitarias	.93	.65	.78	.78	0	.31	0

(16.45)

	$\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*)$	1 Aumento ventas	2 Variación precio venta	3 Posición Competitiva	4 Modificación cuota mercado	5 Calidad de los productos	6 Distribución territorial	7 Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.95	.91	.94	.65	.95	.42	.76
2	Variaciones y ampliación de stocks	.76	.58	.58	.59	.42	.52	.78
3	Capacitación factor humano	.83	.78	.80	.77	.78	.57	.90
4	Fabricación nuevos productos	.99	.77	.84	.94	.77	.71	.78
5	Mejor presentación productos	.82	.73	.80	.81	.42	.50	.49
6	Creación o mejora de laboratorios	.96	.91	.94	.50	.97	.38	.41
7	Mejora en medios de transporte	.92	.57	.92	.59	.42	.92	.80
8	Ampliación red comercial	1	.68	.95	.93	.51	1	.81
9	Acciones publicitarias	.93	.67	.79	.92	.37	.65	.65

(16.46)

Llegados a este punto del proceso, es posible obtener ya los efectos olvidados. Para ello bastará realizar la sustracción $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{M})$ habida cuenta que no resulta necesario respetar la monotonia. Realizadas las operaciones se obtiene la matriz (16.47) que pone de manifiesto el grado de olvido de cada uno de los éfectos.

		1	2	3	4	5	6	7
	$\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}})$	Aumento ventas	Variación precio venta	Posición Competitiva	Modificación cuota mercado	Calidad de los productos	Distribución territorial	Seriedad en los suministros
1	Modernización equipos	.43	.22	.51	.38	0	.41	.68
2	Variaciones y ampliación stocks	.22	.14	.11	.29	.04	.22	0
3	Capacitación factor humano	.07	.28	.15	.28	.02	.24	0
4	Fabricación nuevos productos	0	.64	.01	.19	.73	.48	.78
5	Mejor presentación productos	.22	0	.35	.46	.42	.44	.49
6	Creación o mejora de laboratorios	.74	.29	.64	.31	0	.37	.35
7	Mejora en medios de transporte	.37	.42	.54	.39	.42	0	.02
8	Ampliación red comercial	.05	.47	.04	.24	.51	0	.36
9	Acciones publicitarias	0	.02	.01	.14	.37	.34	.65

(16.47)

Los valores más elevados de las esperanzas matemáticas aparecen en las casillas (a_4, b_7) con $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) = 0.78$, (a_6, b_1) con $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) = 0.74$, y (a_4, b_5) con $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) = 0.73$.

Otros efectos olvidados que merecen especial atención son el debido a la incidencia de la "modernización de los equipos" sobre la "seriedad en los suministros" relación (a_1, b_7) con una $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) = 0.68$ y la "creación o mejora de laboratorios" sobre la "posición competitiva", relación (a_6, b_3) con una $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) = 0.64$. Se podría terminar aquí un primer análisis de los efectos olvidados, aunque, de ser necesario, se podría descender en los valores de la esperanza matemática para encontrar nuevas relaciones de incidencia, si las circunstancias concretas así lo aconsejaran.

Es posible, también, realizar la sustracción nivel a nivel entre las matrices que recogen los efectos acumulados de 1.ª 2.ª generación, $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{*}_{\alpha}$ y las que sólo incluyen los efectos originarios suministrados por los expertos, $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{\alpha}$. A través de los resultados obtenidos en (16.48) se podrán observar las probabilidades de olvido a cada nivel. Evidentemente el interés quedará centrado en los niveles más elevados.

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_1^{\,*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.6	.6	.5	0	.6	0	.1
a_2	.1	0	0	0	0	0	.1
a_3	.2	.1	.1	0	.1	0	.5
a_4	.9	.2	.2	.8	.2	0	.1
a_5	.2	0	.1	.2	0	0	0
a_6	.7	.6	.5	0	.7	0	0
a_7	.6	0	.6	0	0	.6	.2
a_8	1	0	.7	.7	0	1	.2
a_9	.6	0	.1	.6	0	0	0

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_1$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	.1	0	0	.6	0	0
a_2	0	0	0	0	0	0	.1
a_3	0	0	0	0	.1	0	.5
a_4	.9	0	.2	.1	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	.7	0	0
a_7	0	0	0	0	0	.6	.1
a_8	.7	0	.6	0	0	1	0
a_9	.6	0	0	0	0	0	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_1^{\,*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_1$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.6	.5	.5	0	0	0	.1
a_2	.1	0	0	0	0	0	0
a_3	.2	.1	.1	0	0	0	0
a_4	0	.2	0	.7	.2	0	.1
a_5	.2	0	.1	.2	0	0	0
a_6	.7	.6	.5	0	0	0	0
a_7	.6	0	.6	0	0	0	.1
a_8	.3	0	.1	.7	0	0	.2
a_9	0	0	.1	.6	0	0	0

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.9}^{\,*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.9	.7	.9	.1	.9	0	.3
a_2	.2	0	.1	.1	0	.1	.4
a_3	.3	.2	.3	.3	.2	0	.7
a_4	1	.4	.4	.8	.4	0	.4
a_5	.5	.1	.4	.5	0	0	0
a_6	.9	.7	.9	0	1	0	0
a_7	.7	0	.7	0	0	.7	.4
a_8	1	.1	.9	.8	0	.1	.4
a_9	.8	0	.4	.8	0	.2	.2

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.9}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.1	.2	0	0	.9	0	0
a_2	0	0	0	0	0	0	.4
a_3	.2	0	.3	0	.2	0	.7
a_4	1	0	.3	.2	0	0	0
a_5	.1	.1	0	0	0	0	0
a_6	0	.1	0	0	1	0	0
a_7	0	0	0	0	0	.7	.3
a_8	.8	0	.7	0	0	1	.2
a_9	.8	0	.4	.4	0	0	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.9}^{\,*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.9}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.8	.5	.9	.1	0	0	.3
a_2	.2	0	.1	.1	0	.1	0
a_3	.1	.2	0	.3	0	0	0
a_4	0	.4	.1	.6	.4	0	.4
a_5	.4	0	.4	.5	0	0	0
a_6	.9	.6	.9	0	0	0	0
a_7	.7	0	.7	0	0	0	.1
a_8	.2	.1	.2	.8	0	0	.2
a_9	0	0	0	.4	0	2	.2

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.8}^{\,*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	.9	1	.3	1	.2	.6
a_2	.7	.1	.1	.1	0	.1	.7
a_3	.8	.8	.8	.6	.8	.2	.8
a_4	1	.5	.8	.8	.5	.6	.7
a_5	.6	.5	.6	.6	0	0	0
a_6	1	.9	1	.2	1	0	0
a_7	.9	.2	.9	.2	0	.9	.6
a_8	1	.4	.9	.8	.1	1	.7
a_9	.9	.4	.6	.8	0	.4	.4

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.8}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.1	.4	.2	0	1	0	0
a_2	.1	0	.1	0	0	0	.7
a_3	.6	.2	.4	.1	.8	.2	.8
a_4	1	0	.8	.5	0	0	0
a_5	.1	.5	0	0	0	0	0
a_6	0	.3	0	0	1	0	0
a_7	.2	0	0	0	0	.9	.6
a_8	1	0	.8	.3	0	1	.3
a_9	.9	.4	.6	.7	0	0	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.8}^{\,*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.8}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.9	.5	.8	.3	0	.2	.6
a_2	.6	.1	0	.1	0	.1	0
a_3	.2	.6	.4	.5	0	0	0
a_4	0	.5	0	.3	.5	.6	.7
a_5	.5	0	.6	.6	0	0	0
a_6	1	.6	1	.2	0	0	0
a_7	.7	.2	.9	.2	0	0	0
a_8	0	.4	.1	.5	.1	0	.4
a_9	0	0	0	.1	0	.4	.4

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.7}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	.9	1	.4	1	.2	.7
a_2	.7	.3	.3	.3	.2	.2	.7
a_3	1	.8	.8	.8	.8	.2	1
a_4	1	.8	1	1	.8	.7	.7
a_5	.9	.7	.9	.9	.2	.2	.1
a_6	1	.9	1	.2	1	.1	0
a_7	1	.4	1	.4	.2	1	.8
a_8	1	.6	1	1	.2	1	.8
a_9	1	.6	.9	1	.2	.6	.6

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.7}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.3	.7	.3	0	1	0	0
a_2	.1	.2	.2	.1	0	0	.7
a_3	.8	.3	.6	.2	.8	.2	1
a_4	1	0	1	8	0	0	0
a_5	1	.7	.1	0	0	0	0
a_6	0	.5	0	0	1	0	0
a_7	.4	0	.1	0	0	1	.8
a_8	1	0	1	.6	0	1	.3
a_9	1	.6	.9	.9	0	0	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.7}^{*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.7}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.7	.2	.7	.4	0	.2	.7
a_2	.6	.1	.1	.2	.2	.2	0
a_3	.2	.5	.2	.6	0	0	0
a_4	0	.8	0	.2	.8	.7	.7
a_5	.8	0	.8	.9	.2	.2	.1
a_6	1	.4	1	.2	0	.1	0
a_7	.6	.4	.9	.4	.2	0	0
a_8	0	.6	0	.4	.2	0	.5
a_9	0	0	0	.1	.2	.6	.6

(16.48)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.6}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	.7	1	.4	.9
a_2	.9	.7	.7	.7	.2	.6	.9
a_3	1	.9	1	1	.9	.5	1
a_4	1	.8	1	1	.8	.8	.9
a_5	1	1	1	.9	.2	.4	.4
a_6	1	1	1	.5	1	.4	.3
a_7	1	.5	1	.6	.2	1	1
a_8	1	.8	1	1	.5	1	1
a_9	1	.8	.9	1	.2	.7	.7

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.6}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.3	.7	.4	0	1	0	0
a_2	.5	.5	.4	.1	0	.3	.9
a_3	1	.6	.7	.5	.9	.2	1
a_4	1	0	1	.9	0	.2	0
a_5	.7	1	.3	.2	0	0	0
a_6	0	.7	.2	0	1	0	0
a_7	.5	0	.3	0	0	1	1
a_8	1	.1	1	1	0	1	.5
a_9	1	.8	.9	.9	0	.4	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.6}^{*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.6}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.7	.3	.6	.7	0	.4	.9
a_2	.4	.2	.3	.6	.2	.3	0
a_3	0	.3	.3	.5	0	.3	0
a_4	0	.8	0	.1	.8	.6	.9
a_5	.3	0	.7	.7	.2	.4	.4
a_6	1	.3	.8	.5	0	.4	.3
a_7	.5	.5	.7	.6	.2	0	0
a_8	0	.7	0	0	.5	0	.5
a_9	0	0	0	.1	.2	.3	.7

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.5}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.5	1
a_2	1	.7	.8	.7	.5	.7	1
a_3	1	1	1	1	1	.8	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.4	.6	.6
a_6	1	1	1	.5	1	.5	.5
a_7	1	.7	1	.8	.5	1	1
a_8	1	.9	1	1	.7	1	1
a_9	1	.9	1	1	.4	.7	.7

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.5}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.6	.9	.4	.1	1	0	0
a_2	.7	.6	.5	.1	.5	.4	1
a_3	1	.6	.7	.6	.9	.3	1
a_4	1	0	1	1	0	.2	0
a_5	1	1	.6	.4	0	0	0
a_6	0	.7	.3	.1	1	0	0
a_7	.6	0	.5	.1	0	1	1
a_8	1	.1	1	1	0	1	.5
a_9	1	.8	1	.9	0	.4	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.5}^{*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.5}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.4	.1	.6	.9	0	.5	1
a_2	.3	.1	.3	.6	0	.3	0
a_3	0	.4	.3	.4	.1	.5	0
a_4	0	1	0	0	1	.8	1
a_5	0	0	.4	.6	.4	.6	.6
a_6	1	.3	.7	.4	0	.5	.5
a_7	.4	.7	.5	.7	.5	0	0
a_8	0	.8	0	0	.7	0	.5
a_9	0	.1	0	.1	.4	.3	.7

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.4}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.6	1
a_2	1	1	.9	1	.7	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.7	.8	.8
a_6	1	1	1	.7	1	.6	.6
a_7	1	.9	1	.9	.7	1	1
a_8	1	1	1	1	.7	1	1
a_9	1	1	1	1	.5	.9	.9

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.4}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.8	.9	.5	.3	1	0	.1
a_2	1	.7	.6	.4	.7	.4	1
a_3	1	.7	.9	.6	.9	.5	1
a_4	1	0	1	1	0	.3	0
a_5	1	1	.6	.5	0	.1	0
a_6	.1	.9	.4	.2	1	0	0
a_7	.8	.1	.5	.1	0	1	1
a_8	1	.1	1	1	0	1	.6
a_9	1	.9	1	1	0	.5	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.4}^{*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.4}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.2	.1	.5	.7	0	.6	.9
a_2	0	.3	.3	.6	0	.4	0
a_3	0	.3	.1	.4	.1	.5	0
a_4	0	1	0	0	1	.7	1
a_5	0	0	.4	.5	.7	.7	.8
a_6	.9	.1	.6	.5	0	.6	.6
a_7	.2	.8	.5	.8	.7	0	0
a_8	0	.9	0	0	.7	0	.4
a_9	0	.1	0	0	.5	.4	.9

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.3}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.6	1
a_2	1	1	.9	1	.8	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.8	1	1
a_6	1	1	1	.9	1	.6	.8
a_7	1	1	1	1	.8	1	1
a_8	1	1	1	1	.9	1	1
a_9	1	1	1	1	.6	1	1

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.3}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	.8	.5	1	0	.2
a_2	1	.7	.9	.5	.8	.5	1
a_3	1	.7	.9	.9	1	.5	1
a_4	1	0	1	1	0	.4	0
a_5	1	1	.9	.5	0	.1	0
a_6	.3	1	.5	.3	1	0	.2
a_7	1	.2	.6	.4	0	1	1
a_8	1	.4	1	1	0	1	.6
a_9	1	1	1	1	0	.5	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.3}^{*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.3}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	0	.2	.5	0	.6	.8
a_2	0	.3	0	.5	0	.3	0
a_3	0	.3	.1	.1	0	.5	0
a_4	0	1	0	0	1	.6	1
a_5	0	0	.1	.5	.8	.9	1
a_6	.7	0	.5	.6	0	.6	.6
a_7	0	.8	.4	.6	.8	0	0
a_8	0	.6	0	0	.9	0	.4
a_9	0	0	0	0	.6	.5	1

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.2}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.8	1
a_2	1	1	1	1	.9	.9	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.9	1	1
a_6	1	1	1	1	1	.8	.9
a_7	1	1	1	1	.9	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	.8	1	1

(-)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.2}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	.8	.8	1	0	.2
a_2	1	.8	1	.8	.9	.6	1
a_3	1	.9	1	1	1	.6	1
a_4	1	.5	1	1	0	.5	0
a_5	1	1	1	.9	0	.1	0
a_6	.8	1	.7	.5	1	0	.2
a_7	1	.5	.8	.5	0	1	1
a_8	1	.7	1	1	0	1	.7
a_9	1	1	1	1	0	.6	0

=

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.2}^{*} - \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_{0.2}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	0	.2	.2	0	.8	.8
a_2	0	.2	0	.2	0	.3	0
a_3	0	.1	0	0	0	.4	0
a_4	0	.5	0	0	1	.5	1
a_5	0	0	0	.1	.9	.9	1
a_6	.2	0	.3	.5	0	.8	.7
a_7	0	.5	.2	.5	.9	0	0
a_8	0	.3	0	0	1	0	.3
a_9	0	0	0	0	.8	.4	1

$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.1}^{*}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.9	1
a_2	1	1	1	1	.9	1	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	1	1	1
a_6	1	1	1	1	1	.8	1
a_7	1	1	1	1	.9	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	1	1

(-)

$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.1}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	.9	1	1	.1	.3
a_2	1	.9	1	1	.9	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	.8	1
a_4	1	.8	1	1	.4	.7	0
a_5	1	1	1	1	0	.3	0
a_6	1	1	.9	.8	1	.1	.2
a_7	1	.7	1	.9	0	1	1
a_8	1	.7	1	1	0	1	.8
a_9	1	1	1	1	0	.7	0

=

$\underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.1}^{*} - \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{0.1}$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	0	.1	0	0	.8	.7
a_2	0	.1	0	0	0	.2	0
a_3	0	0	0	0	0	.2	0
a_4	0	.2	0	0	.6	.3	1
a_5	0	0	0	0	1	.7	1
a_6	0	0	.1	.2	0	.7	.8
a_7	0	.3	0	.1	.9	0	0
a_8	0	.3	0	0	1	0	.2
a_9	0	0	0	0	1	.3	1

Ante los resultados obtenidos se puede observar que, para los niveles más elevados de incidencia, $\alpha = 1$, $\alpha = 0.9$, $\alpha = 0.8$ y $\alpha = 0.7$, aparecen como efectos olvidados más significativos:

Nivel $\alpha = 1$

$(a_4, b_4) \rightarrow 0.7$
$(a_6, b_1) \rightarrow 0.7$
$(a_8, b_4) \rightarrow 0.7$

Nivel $\alpha = 0.9$

$(a_1, b_3) \rightarrow 0.9$
$(a_6, b_1) \rightarrow 0.9$
$(a_6, b_3) \rightarrow 0.9$

Nivel $\alpha = 0.8$

$(a_6, b_1) \rightarrow 1$
$(a_6, b_3) \rightarrow 1$

Nivel $\alpha = 0.7$

$(a_6, b_1) \rightarrow 1$
$(a_6, b_3) \rightarrow 1$

De ahí se deduce que existe un efecto olvidado, el (a_6, b_1) incidencia de la "creación o mejora de laboratorios" sobre el "aumento de las ventas", que aparece a niveles elevados siempre con una acumulación de probabilidad mayor. También esta incidencia aparece destacada en el análisis por esperanzas matemáticas con un $\varepsilon_{\mathcal{M}^*}(a_6, b_1) - \varepsilon_{\mathcal{M}}(a_6, b_1) = 0.74$. Se puede decir, pues, que éste es un efecto olvidado a considerar prioritariamente.

Otra incidencia, la (a_6, b_3) "creación o mejora de laboratorios" sobre "posición competitiva" surge con la acumulación de probabilidad más grande al nivel $\alpha = 0.9$, y continúa con esta característica en los niveles $\alpha = 0.8$ y $\alpha = 0.7$. En el análisis por esperanzas matemáticas aparece como uno de los valores más elevados (0.64). También cabe tenerla en cuenta como efecto olvidado.Otros efectos olvidados como el (a_4, b_4) "fabricación de nuevos productos" sobre la "modificación de la cuota de mercado" y el (a_1, b_3) "modernización de los equipos" sobre la "posición competitiva", que aparecen al nivel $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.9$ no tienen continuidad a los demás niveles considerados.

Sin embargo algunos efectos que no aparecen como olvidados en niveles altos como el (a_4, b_5) y el (a_4, b_7) incidencia de la "fabricación de nuevos productos" sobre la "calidad de los productos" y sobre la "seriedad en los suministros", sí han sido detectados a través de las esperanzas matemáticas (con unas cifras de 0.73 y 0.78). El motivo se halla en que al hacer sus valuaciones los expertos habían prácticamente olvidado la incidencia (a_4, b_5) y totalmente olvidada la (a_4, b_7) en cambio ambas relaciones de causa a efecto aparecen, en la acumulación, con fuerza a partir del nivel 0.7 y 0.8 respectivamente. El sentido, pues, de uno y otro análisis tiende a complementarse por lo que, en esta aplicación se puede afirmar que, siguiendo estos caminos, se pueden considerar como efectos olvidados más importantes el (a_6, b_1) y el (a_6, b_3), para los que veremos los efectos que actúan como intermediarios.

En cuanto a la relación (a_6, b_1) incidencia de la "creación o mejora en los laboratorios" sobre "aumentos en las ventas" el camino es:

Nivel $\alpha = 1$:

a_6		a_6		b_5		b_1
Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{0.7}$	Calidad productos	$\xrightarrow{0.8}$	Aumento ventas

Nivel $\alpha = 0.9$:

a_6		a_6		b_5		b_1
Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Calidad productos	$\xrightarrow{0.9}$	Aumento ventas

Nivel $\alpha = 0.8$:

a_6		a_6		b_5		b_1
Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Calidad productos	$\xrightarrow{1}$	Aumento ventas

De ahí se deduce que existe una creencia generalizada de que existe una incidencia importante de la creación o mejora de los laboratorios sobre el aumento de las ventas, como consecuencia de la calidad de los productos. Este era un efecto que había sido olvidado por los expertos consultados.

Si se centra la atención en la relación (a_6, b_3) incidencia de la "creación o mejora de los laboratorios" sobre la "posición competitiva" se hallará el siguiente camino:

Nivel $\alpha = 1$:

a_6		a_6		b_5		b_3
Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{0.7}$	Calidad productos	$\xrightarrow{0.5}$	Posición competitiva

Nivel $\alpha = 0.9$:

a_6		a_6		b_5		b_3
Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Calidad productos	$\xrightarrow{0.9}$	Posición competitiva

Nivel $\alpha = 0.8$:

a_6		a_6		b_5		b_3
Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Creación o mejora laboratorios	$\xrightarrow{1}$	Calidad productos	$\xrightarrow{1}$	Posició competitiva

La incidencia de la creación o mejora de los laboratorios resulta pues elevada para la gran mayoría de expertos, si se considera el efecto indirecto a través de la calidad de los productos.

La aparición, una vez más, de la calidad de los productos como elemento que actúa de intermediario viene justificada por la importancia que le han asignado los expertos tanto en lo que se refiere al aumento de los precios y cantidad de ventas como a la posición competitiva, como puede comprobarse en las matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}^{(j)}$ desde (16.25) hasta (16.34).

El análisis de los resultados obtenidos podría ser ampliado a otras consideraciones de interés en un tema tan atractivo como el de la imagen comercial de una empresa. Sin embargo, preferimos terminar aquí dejando abiertas al lector amplias posibilidades de estudio en este campo de las relaciones aleatorias borrosas.

17.- La recuperación de efectos olvidados en la determinación de objetivos en la empresa

La empresa, a través de la realización de sus actividades, persigue determinados objetivos cuyo estudio ha dado lugar a una amplia literatura que ha traspasado incluso los límites de los estudios de gestión. Al abordar este epígrafe, no pretendemos aumentar el número de trabajos que sobre esta materia existen, sino realizar un nuevo planteamiento, partiendo del supuesto que estos objetivos son múltiples y ya han sido determinados.

Consideramos así que las acciones del empresario van encaminadas a la obtención no sólo del máximo beneficio, o el enriquecimiento de los propietarios de la empresa sino que, además, persigue otras metas, las cuales pueden hallarse en un plano de igualdad o ser objetivos secundarios e incluso objetivos intermedios. En todo caso todos ellos resultarán necesarios para la "satisfacción" de los accionistas.

Así pues, se pueden enumerar toda una serie de conceptos que representan, de alguna manera, los fines que la empresa persigue. Sólo a título indicativo, y sin pretender que resulten exclusivos, se pueden considerar los siguientes:

a) Objetivos primarios:
- * Aumentar el valor de la empresa
- * Incrementar la cotización de las acciones
- * Conseguir la permanencia en la vida económica

b) Objetivos secundarios:
- * Obtener un poder político-social
- * Consolidar el prestigio en el mercado
- * Fortalecer la posición para acuerdos con otras empresas

c) Objetivos intermedios:
- * Facilitar la obtención de créditos
- * Favorecer la expansión comercial

Deseamos poner de manifiesto que con esta descripción no se pretende establecer una enumeración exhaustiva de objetivos. Ni tampoco que la clasificación resulta la más adecuada. En el contexto de este estudio sólo constituye el soporte para la utilización de una nueva técnica para la recuperación de efectos olvidados.

Por otra parte existe un conjunto de elementos que pueden ejercer una cierta incidencia sobre estos objetivos. Su enumeración sería larga y a buen seguro incompleta, por mucho que nos empeñáramos en añadir rúbricas a las existentes. Por ello y habida cuenta de la necesidad de realizar un trabajo que permita una cierta agilidad, se han tenido en cuenta algunas de las "causas" que inciden en los objetivos, recogiéndolas de distintos ámbitos de la actividad empresarial. Se han considerado las siguientes:

a) Aspecto económico-financiero:
- Beneficios anuales
- Facturación
- Grado de liquidez

b) Aspecto laboral:
- Número de obreros
- Actividad sindical

c) Aspecto productivo:
- Nivel de stocks
- Grado de tecnología

d) Aspecto comercial:
- Gama de productos en el mercado
- Calidad y presentación de los productos

e) Aspecto rector-coordinador
- Equipo directivo

Las mismas precisiones que hemos realizado para los objetivos son válidas también, y con mayor motivo, ahora. Somos conscientes de que resulta posible modificar, ampliar y reagrupar de manera diferente estos elementos. Dejamos al lector interesado la tarea de realizar un estudio más completo sobre esta idea originaria.

Vamos a proceder ahora, con el concurso de cierto número de expertos, a la asignación de valuaciones a cada una de las relaciones entre causas y efectos, es decir medios y objetivos. En esta ocasión hemos contado también con 10 expertos. Este número resulta, evidentemente, demasiado reducido para que pueda ser base para la obtención de probabilidades, pero en cambio resulta práctico para la realización de los cálculos y no afecta en absoluto ni al esquema propuesto ni al método de resolución.

En esta ocasión se ha solicitado a cada uno de los 10 expertos, sin conexión entre sí, que complimentaran una matriz de incidencia cualitativa permitiéndoseles un mayor grado de libertad en la expresión de sus sensaciones, ya que la valuación de cada incidencia podía ser formulada a través de un intervalo de confianza en el que sus extremos estuvieran comprendidos en el segmento [0,1]. Se les ha señalado que no existe inconveniente en que expresaran sus opiniones a través de un número entre 0 y 1 si lo consideraban posible, ya que, definitiva, éste constituiría un intervalo de confianza en el que sus extremos coinciden.

El resultado de estas opiniones ha desembocado en 10 matrices Φ-borrosas $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{(j)}$, j= 1,2,..., 10 correspondientes a la opinión de cada uno de los expertos, que presentamos de (17.1) a (17.10).

	$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{(1)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	1	[.8,.9]	[.6,.8]	[.4,.5]	[.3,.5]	[.1,.3]	[.8,.9]	[.3,.6]
2	Facturación	[.1,.2]	[.2,.3]	[.4,.6]	[.6,.9]	[.2,.6]	[.3,.5]	[.5,.7]	.1
3	Grado liquidez	[.2,.4]	.1	1	[.2,.3]	0	[.1,.3]	[.6,.9]	[.3,.4]
4	Número de obreros	[.1,.4]	0	.2	[.3,.5]	[.1,.2]	.1	[.4,.5]	1
5	Acción sindical	[.4,.8]	.2	[.3,.5]	0	[.1,.3]	[.4,.6]	.9	1
6	Nivel stocks	[.3,.5]	0	[.6,.7]	0	[.4,.8]	0	[.3,.6]	0
7	Equipo directivo	0	0	[.4,.6]	[.5,.8]	[.8,1]	[.4,.5]	[.6,.9]	[.7,1]
8	Grado tecnológico	[.3,.5]	0	[.2,.3]	[.4,.6]	0	0	[.8,1]	0
9	Gama productos	0	0	0	[.6,.8]	[.7,.9]	[.6,.7]	.9	0
10	Calidad producto	0	0	0	1	1	[.6,.7]	.9	0

(17.1)

	$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{(2)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	1	1	[.8,.9]	[.4,.5]	[.3,.6]	.2	[.8,.9]	[.4,.6]
2	Facturación	[.3,.4]	[.2,.3]	[.5,.7]	[.3,.4]	.2	[0,.4]	[.6,.8]	0
3	Grado liquidez	.1	0	1	[.6,.8]	[.4,.5]	[.2,.4]	.8	[.4,.5]
4	Número de obreros	0	0	0	[.3,.4]	[.4,.8]	.1	[.6,.7]	1
5	Acción sindical	[.3,.4]	0	[.5,.6]	0	0	[.2,.3]	[.4,.7]	1
6	Nivel stocks	.5	0	.8	[.1,.2]	[.4,.6]	0	[.2,.3]	0
7	Equipo directivo	[.4,.8]	.2	[.8,.9]	[.7,.9]	[.6,.8]	[.4,.5]	[.7,1]	[.8,.9]
8	Grado tecnológico	[.6,.7]	0	[.4,.5]	[.7,.9]	.1	0	[.6,.8]	0
9	Gama productos	0	0	[.1,.4]	[.6,.7]	1	0	[.6,.9]	0
10	Calidad producto	0	0	0	1	1	[.4,.5]	.9	0

(17.2)

	$\underset{\sim}{\mathfrak{R}}^{(3)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización de acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	.9	.9	1	[.3,.4]	[.6,.7]	[.3,.4]	1	[.7,.9]
2	Facturación	[.1,.2]	[.1,.2]	[.4,.6]	[.4,.5]	[.4,.6]	[.1,.3]	[.4,.6]	.1
3	Grado liquidez	[.2,.3]	0	[.6,.8]	[.6,.8]	[.5,.7]	[.4,.5]	1	[.6,.7]
4	Número de obreros	[.3,.5]	0	[.1,.3]	0	[.4,.6]	[.6,.8]	[.3,.7]	1
5	Acción sindical	[.4,.5]	0	0	0	0	[.3,.6]	.9	1
6	Nivel stocks	[.2,.3]	0	[.5,.7]	[.4,.5]	[6,.7]	[.3,.5]	[.4,.7]	0
7	Equipo directivo	[.5,.8]	[.1,.3]	.9	[.6,.8]	.9	[.3,.7]	.9	[.8,.9]
8	Grado tecnológico	[.3,.6]	0	[.1,.3]	[.6,.7]	[.8,.9]	[.4,.6]	1	.1
9	Gama productos	0	0	0	1	1	[.5,.6]	.8	0
10	Calidad producto	0	0	0	1	1	[.3,.7]	1	0

(17.3)

	$\underset{\sim}{\mathfrak{R}}^{(4)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización de acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	1	.8	1	[.4,.7]	[.7,.8]	[.6,.8]	1	.5
2	Facturación	[.2,.3]	0	[.4,.6]	[.5,.7]	[.4,.5]	.2	[.2,.6]	.1
3	Grado liquidez	[.3,.4]	0	[.5,.7]	[.4,.6]	.2	0	[.6,.8]	[.5,.7]
4	Número obreros	0	0	0	[.2,.5]	[.3,.5]	[.2,.5]	[.7,.8]	.9
5	Acción sindical	0	0	0	[.3,.5]	0	[.2,.3]	[.7,.8]	1
6	Nivel stocks	.1	0	[.4,.6]	[.2,.4]	[.5,.7]	0	.9	0
7	Equipo directivo	[.6,.8]	0	[.5,.7]	[.8,.9]	[.6,.8]	[.4,.5]	1	.9
8	Grado tecnológico	[.4,.6]	0	[.1,.2]	[.7,.8]	[.6,.8]	[.3,.4]	1	0
9	Gama productos	0	0	0	1	1	0	[.7,.9]	0
10	Calidad producto	0	0	.1	1	[.8,.9]	[.4,.5]	1	0

(17.4)

	$\tilde{\mathcal{M}}^{(5)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	1	.9	[.7,.9]	[.5,.6]	[.5,.7]	[.3,.4]	1	[.4,.6]
2	Facturación	0	0	[.2,.6]	[.4,.6]	[.3,.6]	[.2,.5]	[.6,.8]	0
3	Grado liquidez	[.4,.5]	[.2,.3]	[.6,.8]	[.6,.7]	[.5,.7]	.1	[.8,1]	[.4,.5]
4	Número de obreros	.2	0	[.1,.3]	[.5,.6]	[.5,.7]	.1	[.6,.8]	1
5	Acción sindical	0	0	0	[.3,.6]	0	0	[.4,.7]	1
6	Nivel stocks	.1	0	[.4,.6]	[.5,.7]	[.8,.9]	0	[.5,.6]	0
7	Equipo directivo	[.6,.7]	0	[.4,.5]	[.7,.8]	[.6,.8]	[.2,.5]	.8	.8
8	Grado tecnológico	[.5,.7]	0	[.4,.7]	.8	[.5,.8]	[.1,.3]	1	0
9	Gama de productos	0	0	.1	1	1	[.3,.6]	1	0
10	Calidad producto	0	0	0	1	1	[.3,.6]	1	0

(17.5)

	$\tilde{\mathcal{M}}^{(6)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	1	.9	[.7,.8]	[.4,.5]	[.6,.8]	.2	1	[.3,.5]
2	Facturación	0	0	[.5,.6]	[.3,.5]	[.2,.4]	[.3,.5]	[.6,.7]	0
3	Grado liquidez	[.4,.6]	0	[.7,.8]	[.6,.7]	[.5,.6]	[.4,.6]	1	[.5,.6]
4	Número de obreros	0	0	0	0	[.4,.6]	[.3,.6]	[.6,.8]	[.7,.9]
5	Acción sindical	0	0	0	[.4,.7]	0	.1	[.5,.6]	1
6	Nivel stocks	[.3,.4]	0	[.6,.7]	[.4,.6]	[.6,.8]	.1	[.4,.5]	0
7	Equipo directivo	[.5,.7]	0	[.5,.7]	[.8,1]	[.9,1]	[.4,.5]	.9	1
8	Grado tecnológico	[.5,.7]	0	[.6,.8]	1	[.4,.7]	[.2,.4]	1	0
9	Gama de productos	0	0	0	1	1	[.6,.7]	.9	0
10	Calidad producto	0	0	0	1	1	[.6,.7]	1	0

(17.6)

	$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{(7)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	1	[.8,.9]	[.6,.7]	[.3,.5]	[.6,.8]	[.2,.4]	1	[.6,.7]
2	Facturación	0	0	[.6,.8]	[.4,.7]	[.3,.5]	.1	[.4,.5]	0
3	Grado liquidez	[.3,.6]	0	[.7,.9]	[.4,.7]	[.5,.6]	.1	1	[.3,.5]
4	Número de obreros	0	0	0	[.2,.3]	[.4,.6]	[.4,.6]	[.7,.9]	.8
5	Acción sindical	0	0	0	[.2,.4]	.1	[.5,.6]	[.6,.7]	1
6	Nivel stocks	[.1,.2]	0	[.4,.6]	[.3,.5]	[.6,.8]	0	[.6,.8]	0
7	Equipo directivo	[.4,.7]	0	[.6,.7]	[.4,.7]	[.6,.7]	[.4,.8]	1	[.6,.9]
8	Grado tecnológico	[.3,.6]	0	[.6,.7]	.8	[.3,.4]	[.2,.4]	1	0
9	Gama de productos	0	0	[.1,.3]	1	1	[.2,.5]	[.8,.9]	0
10	Calidad producto	0	0	[.1,.3]	1	1	[.2,.6]	.9	0

(17.7)

	$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{(8)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	.9	.9	1	[.3,.5]	[.5,.7]	[.1,.3]	1	[.5,.7]
2	Facturación	0	0	[.6,.8]	[.5,.7]	[.1,.4]	0	[.4,.6]	0
3	Grado liquidez	[.6,.7]	0	[.7,.9]	[.2,.3]	[.4,.6]	.1	[.9, 1]	[.6,.7]
4	Número de obreros	0	0	.1	0	[.3,.5]	[.2,.5]	[.4,.7]	[.8,1]
5	Acción sindical	0	0	0	.1	0	[.1,.3]	[.4,.6]	1
6	Nivel stocks	0	0	[.6,.8]	[.5,.7]	[.4,.7]	[.3,.6]	[.4,.7]	0
7	Equipo directivo	[.5,.7]	0	[.6,.8]	[.5,.8]	[.5,.7]	[.4,.6]	.9	[.7,.9]
8	Grado tecnológico	[.4,.7]	0	[.5,.7]	[.4,.6]	[.3,.4]	.1	[.8,1]	0
9	Gama de productos	0	0	[.3,.4]	1	1	[.4,.7]	1	0
10	Calidad producto	0	0	0	1	1	[.4,.7]	1	0

(17.8)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(9)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	[.8,.9]	.9	1	[.3,.5]	[.4,.7]	.2	1	[.4,.6]
2	Facturación	.1	0	[.3,.4]	[.4,.6]	[.2,.5]	.1	[.2,.3]	0
3	Grado liquidez	[.6,.8]	.2	[.6,.8]	[.6,.8]	[.3,.5]	.1	[.7,.9]	.2
4	Número de obreros	.1	0	[.3,.4]	0	[.5,.6]	[.4,.7]	.5	1
5	Acción sindical	0	0	0	0	[.2,.4]	[.3,.6]	[.6,.8]	1
6	Nivel stocks	.2	0	[.7,.8]	[.8,.9]	[.6,.7]	0	[.2,.3]	0
7	Equipo directivo	[.4,.6]	0	[.6,.7]	[.4,.7]	.8	[.6,.8]	.9	[.8,.9]
8	Grado tecnológico	[.2,.3]	0	[.3,.4]	[.3,.6]	[.5,.7]	[.3,.5]	1	.1
9	Gama de productos	0	0	[.3,.4]	1	1	[.5,.6]	1	0
10	Calidad producto	0	0	[.4,.5]	1	1	[.6,.8]	1	0

(17.9)

	$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(10)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Beneficios anuales	1	.8	[.7,.9]	.2	[.4,.7]	[.3,.4]	1	[.5,.7]
2	Facturación	[.1,.2]	0	[.6,.8]	[.5,.7]	.1	0	[.4,.6]	0
3	Grado liquidez	[.6,.8]	.2	1	[.6,.7]	[.5,.6]	.2	1	[.4,.6]
4	Número de obreros	.3	0	.1	.1	[.5,.7]	0	[.6,.8]	.9
5	Acción sindical	.1	.0	[.2,.4]	0	0	[.3,.4]	[.5,.7]	1
6	Nivel stocks	.1	0	[.6,.8]	[.5,.6]	[.6,.8]	[.3,.5]	[.2,.5]	0
7	Equipo directivo	[.4,.6]	.1	[.4,.7]	[.2,.4]	[.5,.6]	[.4,.5]	[.7,.9]	[.6,.8]
8	Grado tecnológico	[.3,.5]	0	[.6,.7]	[.1,.3]	[.3,.5]	[.2,.4]	1	0
9	Gama de productos	0	0	[.2,.4]	1	1	[.5,.7]	1	0
10	Calidad producto	0	0	0	1	1	[.6,.7]	1	0

(17.10)

Una vez obtenida esta información, se ha pasado a recopilar los datos contenidos en las matrices Φ-borrosas $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(j)}$ en (17.11) en donde se recoge, en cada apartado, la estadística de los extremos inferiores, a la izquierda y la de los extremos superiores, a la derecha.

		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7		b_8	
	0																
	.1											2					
	.2							1	1			4	3				
	.3							4		2		3	2			2	
	.4							4	1	2			4			3	
a_1	.5							1	6	2	1					3	2
	.6					2			1	3	1	1				1	4
	.7					3	1		1	1	5					1	3
	.8	1		4	2	1	2				3		1	2			
	.9	2	3	5	7		3								2		1
	1	7	7	1	1	4	4							8	8		
	0	4	4	7	7							3	2			7	7
	.1	4	1	1						2	1	3	2			3	3
	.2	1	3	2	1	1				4	1	2	1	2			
	.3	1	1		2	1		2		2		2	1		1		
	.4		1			3	1	4	1	2	2		1	4			
	.5					2		3	2		3		3	1	1		
a_2	.6					3	5	1	2		3			3	4		
	.7						1		4						2		
	.8						3								2		
	.9								1								
	1																
	0			6	6					1	1	1	1				
	.1	1	1	1	1							5	4				
	.2	2		3	2			2		1	1	2	1			1	1
	.3	2	1		1				2	1			1			2	
	.4	2	2					2		2		2	1			3	1
	.5		1			1				5	2		1			2	3
a_3	.6	3	2			3		6	1		4		1	2		2	2
	.7		1			3	1		4		2			1			3
	.8		2				4		3					2	2		
	.9						2							1	2		
	1					3	3							4	6		
	0	5	5	10	10	4	4	4	4			1	1				
	.1	2	1			4	2	1	1	1		3	3				
	.2	1	1			1	1	2			1	2					
	.3	2	1			1	2	2	1	2		1		1			
	.4		1				1		1	4		2		2			
	.5		1					1	2	3	2		2	1	2		
a_4	.6								1		4	1	2	4			
	.7										2		1	2	3	1	
	.8										1		1		4	2	1
	.9														1	2	3
	1															5	6
	0	6	6	9	9	7	7	5	5	7	7	1	1				
	.1	1	1					1	1	2	1	2	1				
	.2			1	1	1		1		1		2					
a_5	.3	1				1		2			1	3	3				
	.4	2	1				1	1	1		1	1	1	3			
	.5		1			1	1		1			1		2			
	.6						1		1				4	2	2		
	.7								1					1	4		
	.8		1												2		
	.9													2	2		
	1															10	10

		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7		b_8	
	0	1	1	10	10			1	1			6	6			10	10
	.1	4	3					1				1	1				
	.2	2	2					1	1					3			
	.3	2	1					1				3		1	2		
	.4		1			3		2	1	3				3			
a_6	.5	1	2			1		3	2	1			2	1	2		
	.6					4	3		2	5	1		1	1	2		
	.7					1	3		2		4				2		
	.8					1	4	1		1	4				1		
	.9								1		1			1	1		
	1																
	0	1	1	7	7												
	.1			2	1												
	.2			1	1			1				1					
	.3				1							1					
	.4	4				3		2	1			7					
	.5	3				2	1	2		2			6				
a_7	.6	2	2			3	1	1		4	1	1	1	1		2	
	.7		4				5	2	2		2		1	2		2	
	.8		3			1	1	2	4	2	4		2	1	1	4	2
	.9					1	2		2	2	1			4	6	1	6
	1								1		2			2	3	1	2
	0			10	10					1	1	2	2			8	8
	.1					2		1		1	1	2	1			2	2
	.2	1				1	1					3					
	.3	4	1			1	2	1	1	3		2	1				
	.4	2				2	1	2		1	2	1	4				
	.5	2	2			1	1			2	1		1				
a_8	.6	1	3			3		1	3	1			1	1			
	.7		4				4	2	1		2						
	.8						1	2	3	1	2			2	1		
	.9								1		1						
	1							1	1					7	9		
	0	10	10	10	10	4	4					2	2			10	10
	.1					3	1										
	.2					1						1					
	.3					2	1					1					
	.4						4					1					
	.5											3	1				
a_9	.6							2				2	3	1			
	.7								1	1			4	1			
	.8								1					2	1		
	.9										1			2	5		
	1							8	8	9	9			4	4		
	0	10	10	10	10	7	7									10	10
	.1					2	1										
	.2											1					
a_{10}	.3						1					2					
	.4					1						3					
	.5						1						2				
	.6											4	2				
	.7												5				
	.8									1			1				
	.9										1			3	3		
	1							10	10	9	9			7	7		

(17.11)

Una vez obtenida la estadística de los extremos inferiores y superiores nos encontramos en disposición de construir un cuadro en el que se recojan las probabilidades acumuladas, tanto para las probabilidades inferiores como superiores, tal como se ha hecho en (10.3), lo que constituirá una matriz de incidencia por expertones.

El camino a seguir a partir de ahora es paralelo al utilizado en el supuesto de matrices aleatorias borrosas, aunque para simplificar el proceso se puede emplear un método que consiste en obtener las medias directamente. Evidentemente el procedimiento es menos riguroso dado que la operación maxmin no es lineal pero podemos comprobar que puede llevar a la suficiente aproximación dado el contexto de subjetividad en que nos movemos.

El proceso genuino, que se deriva de la utilización de los expertones, exige la acumulación de probabilidades como operación previa a la realización de las operaciones de convolución. Sólo después de la desacumulación se pueden obtener las esperanzas matemáticas.

Tanto para uno como para otro de los caminos, debe procederse a solicitar a los mismos expertos que proporcionen sus opiniones en relación a unas nuevas incidencias: las que existen entre las "causas" de la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(j)}$ consigo mismas y con las demás, de tal manera que se les ha planteado que cumplimentaran, cada uno de ellos, una matriz Φ - borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(j)}$ en la que tanto filas como columnas comprenden los mismos conceptos: beneficios anuales, facturación, grado de liquidez,...

La respuesta a nuestra solicitud ha proporcionado 10 nuevas matrices, en las que figura la opinión de cada experto sobre la relación de incidencia en términos de intervalos de confianza, que se incluyen desde (7.12) hasta (7.21).

(17.12)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(1)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama de productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	0	[.7,.8]	.1	[.6,.8]	[.4,.6]	[.4,.6]	[.6,.8]	[.2,.4]	0
2	Facturación	1	1	1	[.6,.7]	[.3,.5]	.8	0	[.5,.7]	.1	.1
3	Grado liquidez	[.2,.4]	0	1	0	0	[.6,.7]	0	[.6,.8]	0	0
4	Número de obreros	[.5,.7]	[.5,.7]	.2	1	1	0	[.6,.8]	[.1,.4]	0	[.4,.5]
5	Acción sindical	[.6,.8]	.2	[.1,.3]	[.2,.4]	1	0	[.2,.4]	.2	0	[.3,.6]
6	Nivel stocks	[.5,.7]	.8	[.6,.8]	0	0	1	0	0	[.6,.7]	[.2,.4]
7	Equipo directivo	1	1	[.5,.7]	[.6,.8]	[.4,.7]	[.4,.5]	1	[.8,.9]	[.8,.9]	[.8,.9]
8	Grado tecnológico	[.7,.9]	[.7,.9]	.1	1	[.6,.8]	[.7,.9]	0	1	[.6,.8]	1
9	Gama de productos	1	1	[.4,.6]	[.8,.9]	0	1	0	[.4,.7]	1	0
10	Calidad producto	1	1	.3	[.2,.3]	0	[.5,.7]	0	[.2,.5]	0	1

(17.13)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(2)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama de productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	0	1	0	[.7,.8]	[.2,.4]	[.3,.6]	[.6,.8]	[.4,.6]	.3
2	Facturación	1	1	[.7,.9]	.9	[.1,.3]	[.7,.9]	0	[.4,.6]	0	0
3	Grado liquidez	[.2,.5]	0	1	0	[.3,.6]	[.7,.8]	0	[.3,.5]	[.5,.7]	[.3,.6]
4	Número de obreros	[.6,.8]	[.7,.8]	[.3,.5]	1	1	[.2,.4]	[.2,.5]	0	.1	0
5	Acción sindical	[.5,.7]	[.5,.6]	0	[.6,.8]	1	0	[.4,.7]	.1	.1	0
6	Nivel stocks	[.4,.6]	[.4,.6]	[.6,.8]	0	0	1	0	0	[.3,.5]	0
7	Equipo directivo	[.8,.9]	[.8,.9]	[.5,.7]	[.6,.8]	[.4,.6]	[.4,.6]	1	.9	1	1
8	Grado tecnológico	[.7,.8]	[.5,.7]	0	1	[.6,.8]	[.6,.8]	[.2,.5]	1	[.4,.6]	1
9	Gama de productos	1	1	[.3,.5]	[.4,.7]	0	1	0	0	1	0
10	Calidad producto	1	1	[.7,.9]	[.7,.9]	0	[.6,.8]	0	0	0	1

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(3)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	[.2,.4]	1	0	[.3,.5]	.1	0	[.6,.8]	[.2,.4]	[.2,.4]
2	Facturación	1	1	[.6,.8]	1	0	[.6,.8]	[.2,.5]	[.4,.8]	0	0
3	Grado liquidez	[.4,.6]	0	1	0	[.2,.4]	[.4,.7]	0	[.6,.8]	0	0
4	Número de obreros	[.4,.6]	[.3,.6]	[.2,.4]	1	1	.2	[.5,.7]	0	0	0
5	Acción sindical	[.6,.7]	[.6,.7]	[.1,.3]	[.6,.8]	1	0	[.5,.7]	[.2,.3]	0	0
6	Nivel stocks	[.7,.8]	[.4,.6]	[.7,.8]	0	0	1	0	0	[.5,.7]	.1
7	Equipo directivo	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.7,.8]	.2	[.7,.9]	1	1	1	1
8	Grado tecnológico	[.6,.8]	[.6,.8]	[.2,.3]	1	.1	[.4,.6]	[.6,.8]	1	[.2,.4]	1
9	Gama de productos	1	1	[.4,.6]	[.6,.7]	0	1	0	0	1	0
10	Calidad producto	1	1	[.4,.7]	[.2,.4]	0	0	0	[.2,.5]	0	1

(17.14)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(4)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	.2	[.6,.8]	0	[.4,.7]	[.5,.7]	0	[.7,.9]	[.1,.3]	[.1,.3]
2	Facturación	1	1	1	1	0	1	0	[.7,.9]	0	[.2,.4]
3	Grado liquidez	[.4,.6]	0	1	0	.1	[.6,.7]	0	.1	0	0
4	Número de obreros	[.5,.7]	[.4,.7]	[.3,.5]	1	1	0	[.2,.5]	0	0	0
5	Acción sindical	[.3,.5]	[.5,.7]	0	[.2,.4]	1	0	[.2,.3]	0	0	0
6	Nivel stocks	[.2,.4]	[.3,.5]	[.8,.9]	0	0	1	0	0	[.2,.4]	0
7	Equipo directivo	1	1	[.4,.6]	[.2,.4]	[.4,.8]	[.5,.7]	1	1	1	1
8	Grado tecnológico	[.4,.6]	[.3,.5]	.1	1	[.4,.6]	.9	[.4,.7]	1	[.4,.7]	1
9	Gama productos	1	1	[.2,.5]	[.6,.8]	0	1	0	[.2,.4]	1	0
10	Calidad producto	1	1	[.4,.6]	[.3,.5]	0	0	0	0	0	1

(17.15)

(17.16)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(5)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama de productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	[.3,.4]	[.4,.6]	0	.1	[.4,.6]	0	[.4,.6]	.4	.2
2	Facturación	1	1	1	[.7,.9]	0	1	0	.8	0	0
3	Grado liquidez	[.5,.7]	0	1	0	0	[.6,.8]	0	[.5,.8]	[.1,.4]	0
4	Número de obreros	[.4,.7]	[.6,.8]	.2	1	1	[.3,.5]	0	[.2,.4]	0	0
5	Acción sindical	[.5,.7]	[.5,.7]	.1	[.5,.7]	1	0	[.4,.6]	.1	0	0
6	Nivel stocks	[.4,.5]	[.4,.6]	.9	0	0	1	0	0	[.3,.5]	0
7	Equipo directivo	.9	.8	[.2,.4]	.1	[.2,.4]	[.4,.7]	1	1	1	[.6,.9]
8	Grado tenológico	[.2,.5]	[.3,.6]	0	1	[.1,.4]	[.6,.8]	[.4,.6]	1	[.2,.4]	1
9	Gama productos	1	1	0 .	1	0	1	0	0	1	0
10	Calidad producto	1	1	[.3,.5]	[.2,.4]	0	0	0	[.4,.6]	0	1

(17.17)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(6)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama de productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	0	[.7,.9]	0	[.1,.4]	[.3,.7]	0	[.5,.7]	[.2,.4]	0
2	Facturación	1	1	[.6,.9]	1	0	[.8,1]	0	[.6,.7]	0	0
3	Grado liquidez	[.2,.4]	0	1	0	0	[.4,.7]	0	[.3,.6]	0	0
4	Número de obreros	[.7,.8]	[.7,.8]	0	1	1	0	[.4,.6]	[.5,.7]	.1	0
5	Acción sindical	[.4,.8]	[.3,.4]	0	1	1	0	[.4,.6]	0	0	0
6	Nivel stocks	[.5,.7]	[.5,.7]	1	0	0	1	0	0	[.4,.6]	0
7	Equipo directivo	1	1	[.6,.9]	[.4,.6]	0	1	1	1	1	1
8	Grado tecnológico	1	[.7,.9]	0	1	0	[.6,.8]	[.4,.7]	1	[.6,.8]	1
9	Gama productos	1	1	0	1	0	1	[.3,.4]	0	1	0
10	Calidad producto	1	1	0	0	0	0	0	[.1,.4]	0	1

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(7)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	.1	1	0	0	[.4,.7]	0	[.5,.7]	[.2,.4]	[.1,.2]
2	Facturación	1	1	[.4,.7]	[.4,.6]	0	1	[.2,.4]	[.5,.7]	[.4,.6]	0
3	Grado liquidez	[.4,.6]	0	1	0	[.2,.4]	[.6,.8]	0	[.4,.7]	0	0
4	Número de obreros	[.6,.8]	1	0	1	1	0	[.4,.6]	[.2,.5]	[.2,.4]	0
5	Acción sindical	[.6,.8]	0	0	[.7,.9]	1	0	[.2,.5]	[.2,.6]	0	0
6	Nivel stocks	[.3,.6]	[.4,.5]	[.7,.9]	0	0	1	0	0	[.4,.7]	0
7	Equipo directivo	1	1	[.4,.7]	[.5,.7]	[.2,.4]	[.6,.8]	1	1	1	1
8	Grado tecnológico	1	[.6,.8]	0	1	0	[.5,.7]	[.4,.6]	1	[.5,.7]	1
9	Gama productos	1	1	[.3,.5]	1	0	1	0	0	1	0
10	Calidad producto	1	1	0	0	0	0	0	[.4,.6]	0	1

(17.18)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(8)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	0	[.6,.9]	0	0	[.4,.6]	0	[.6,.8]	.1	.1
2	Facturación	1	1	[.3,.6]	[.3,.6]	0	[.8,1]	0	[.6,.9]	.1	0
3	Grado liquidez	[.4,.7]	0	1	0	0	[.6,.8]	0	[.4,.7]	0	0
4	Número de obreros	.9	[.6,.8]	0	1	1	0	[.3,.5]	[.2,.4]	0	0
5	Acción sindical	[.6,.7]	[.2,.5]	[.3,.5]	[.6,.8]	1	0	0	0	0	0
6	Nivel stocks	[.2,.4]	[.1,.3]	[.7,.8]	0	0	1	0	[.1,.4]	0	0
7	Equipo directivo	1	1	[.7,.8]	[.5,.7]	[.3,.5]	[.6,.8]	1	1	1	1
8	Grado tecnológico	[.7,.9]	[.3,.6]	0	1	0	[.7,.9]	[.4,.6]	1	[.5,.7]	1
9	Gama productos	1	1	0	1	0	1	0	[.5,.6]	1	0
10	Calidad producto	1	1	0	[.7,.9]	0	0	0	[.6,.8]	0	1

(17.19)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(9)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	0	[.7,.9]	0	[.2,.4]	[.4,.6]	0	[.5,.6]	0	0
2	Facturación	1	1	[.6,.8]	[.5,.7]	.1	1	0	[.5,.7]	0	0
3	Grado liquidez	[.5,.7]	0	1	0	0	[.4,.7]	0	[.6,.8]	0	0
4	Número de obreros	[.6,.8]	[.7,.9]	[.2,.5]	1	1	.1	[.2,.3]	[.5,.7]	[.3,.4]	[.3,.4]
5	Acción sindical	[.5,.7]	[.5,.7]	0	[.7,.9]	1	0	[.4,.6]	0	0	0
6	Nivel stocks	[.3,.6]	[.2,.5]	1	[.1,.3]	0	1	0	0	0	0
7	Equipo directivo	[.7,.9]	[.6,.8]	[.4,.7]	[.3,.6]	[.2,.5]	[.4,.6]	1	1	1	1
8	Grado tecnológico	[.6,.8]	[.5,.7]	0	1	[.4,.6]	.9	[.3,.5]	1	[.4,.6]	1
9	Gama productos	1	1	[.2,.4]	1	0	1	0	0	1	0
10	Calidad producto	1	1	.1	[.2,.4]	0	0	0	[.3,.6]	0	1

(17.20)

	$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(10)}$	1 Beneficios anuales	2 Facturación	3 Grado liquidez	4 Número de obreros	5 Acción sindical	6 Nivel stocks	7 Equipo directivo	8 Grado tecnológico	9 Gama productos	10 Calidad producto
1	Beneficios anuales	1	[.1,.3]	[.7,.8]	0	[.4,.6]	[.3,.6]	[.1,.3]	[.4,.6]	[.2,.3]	[.2,.3]
2	Facturación	1	1	[.4,.6]	1	0	1	0	[.6,.8]	0	0
3	Grado liquidez	[.4,.7]	0	1	0	0	[.5,.7]	0	[.4,.6]	[.1,.3]	[.1,.3]
4	Número de obreros	[.5,.6]	[.4,.6]	[.3,.6]	1	1	[.2,.4]	[.2,.4]	[.3,.5]	[.2,.4]	[.2,.4]
5	Acción sindical	[.5,.6]	[.3,.5]	[.2,.4]	[.7,.9]	1	0	[.3,.5]	[.2,.4]	0	0
6	Nivel stocks	[.4,.6]	[.4,.7]	1	[.2,.4]	0	1	0	0	0	0
7	Equipo directivo	1	1	[.5,.7]	[.4,.6]	[.5,.8]	1	1	1	1	1
8	Grado tecnológico	[.5,.8]	[.3,.4]	.1	1	[.3,.6]	[.6,.8]	[.4,.6]	1	[.5,.8]	1
9	Gama productos	1	1	[.5,.7]	1	0	1	0	[.2,.4]	1	0
10	Calidad producto	1	1	[.5,.7]	[.3,.4]	0	0	0	[.5,.7]	0	1

(17.21)

La recepción de estas informaciones merecerá ciertos comentarios. Sólo a título indicativo señalaremos algunos de ellos dado que un análisis exhaustivo saldría fuera de los límites que nos hemos impuesto para esta obra.

En algunos casos, la asignación de valuaciones a relaciones de incidencia resulta aparentemente anómala. A título de ejemplo se puede mencionar las incidencias que provocan causas tales como el "número de obreros" y la "acción sindical" sobre los "beneficios anuales" o sobre la "facturación" que si a primera vista podrían parecer paralelas, han sido consideradas por algún experto de manera diferenciada. Asi, por ejemplo, el experto (7) asigna una incidencia igual sobre los beneficios tanto si la causa es el número de obreros como la acción sindical [.6,.8], mientras que en la incidencia sobre la facturación considera que el número de obreros es fundamental (grado de incidencia 1) en tanto que es nula la que ejerce la acción sindical. Interpretamos que la explicación se halla en el hecho que si bien las actuaciones sindicales pueden afectar a los gastos (huelgas, paros intermitentes, etc.) no tienen influencia alguna sobre los ingresos. Es por ello que afectan a los beneficios pero no a la facturación. Esta es, por lo menos, la opinión de este experto...

La respuesta que han dado distintos expertos a una misma relación, resulta en muchos casos concordante, pero en otros se observa una diferencia importante de criterio. Valga como ejemplo la incidencia de a_{10} "calidad del producto" sobre a_4 "número de obreros". La mayor parte de los expertos han coincidido en señalar que la incidencia es baja, más bien baja o nula, mientras que dos de ellos, el (2) y el (8) le han asignado una valuación alta y curiosamente la misma [.7,.9] . Hay que entender que resulta general la creencia de que la calidad de un producto o servicio no incide, o incide poco, en un aumento del número de obreros que se destinan a fabricarlo. Pero aunque minoritaria (en este limitado estudio) también existe la opinión de que la calidad exige una mayor "dedicación" de la mano de obra. Es frecuente escuchar de parte de los responsables de un centro productivo que "no podemos conseguir mayor calidad si no nos dan más hombres..."

Otras muchas reflexiones podrían realizarse en torno a las matrices suministradas por los expertos, que dejamos en manos de los lectores para pasar a realizar una estadística en la que se reflejen las veces que se repite cada nivel de incidencia para todas las posibles relaciones. El resultado queda reflejado en (17.22).

		a1		a2		a3		a4		a5		a6		a7		a8		a9		a10	
	0			5	5			9	9	2	2			7	7			1	1	3	3
	.1			2	1			1	1	2	1	1	1	1				2	1	3	1
	.2			2	1					1		1						5		3	2
	.3			1	1					1		2		1	1				2	1	3
	.4				2	1				2	2	5	1	1		2		2	5		1
	.5										1	1				3					
	.6					2	1			1	1		5		2	4	3		1		
	.7					4				1	1		3			1	2				
	.8						3				2						4				
	.9						3										1				
	1	10	10			3	3														
	0									7	7			8	8			7	7	8	8
	.1									2	1							2	2	1	1
	.2													2						1	
	.3					1		1		1	1										
	.4					2		1							1	2		1			1
	.5							1			1				1	3					
	.6					3	2	1	2			1				3	1		1		
	.7					1	1	1	2			1				1	4				
	.8						2					3	2			1	3				
	.9						2	1	2				1				2				
	1	10	10	10	10	3	3	4	4			5	7								
	0			10	10			10	10	6	6			10	10			7	7	8	8
	.1									1	1					1	1	2		1	
	.2	3				1				2											
	.3									1						2			1	1	1
	.4	5	2								2	3				3			1		
	.5	2	1									1				1	1	1			
	.6		3								1	5				3	2				1
	.7		4									1	6				2		1		
	.8												4				4				
	.9																				
	1					10	10														
	0					3	3					5	5	1	1	3	3	5	5	7	7
	.1											1	1			1		2	2		
	.2					4	2					3	1	4		3		2		1	
	.3			1		3						1		1	1	1		1		1	
	.4	2		2			1						2	2	1		3		3	1	2
	.5	3		1			3						1	1	3	2	2				1
	.6	3	2	2	2		1							1	2						
	.7	1	3	3	2										1		2				
	.8		4		4										1						
	.9	1	1		1																
	1			1	1			10	10	10	10										
	0			1	1	5	5					10	10	1	1	4	4	9	9	9	9
	.1					3	1									2	2	1	1		
	.2			2	1	1		2						3		4	1				
	.3	1		2		1	2							1	1		1			1	
	.4	1			1		1		2					4	1		1				
	.5	4	1	4	2		1	1						1	2						
	.6	4	1	1	1			3							3		1				1
	.7		5		4			3	1						2						
	.8		3						3												
	.9								3												
	1							1	1	10	10										

		a1		a2		a3		a4		a5		a6		a7		a8		a9		a10	
	0							8	8	10	10			10	10	9	9	3	3	8	8
	.1			1				1								1				1	1
	.2	2		1				1										1		1	
	.3	2		1	1				1									2			
	.4	3	2	5					1								1	2	1		1
a_6	.5	2	1	1	3													1	2		
	.6		4		3	2												1	1		
	.7	1	2		2	3													3		
	.8		1	1	1	1	4														
	.9					1	3														
	1					3	3					10	10								
	0									1	1										
	.1							1	1												
	.2					1		1		4	1										
	.3							1		1											
	.4					3	1	2	1	3	2	4									
	.5					3		2		1	2	1	1								
a_7	.6			1		1	1	2	3		1	2	2							1	
	.7	2				2	5	1	2		1	1	2								
	.8	1		2	2		1		3		2		2			1		1		1	
	.9	1	4		1		2						1			1	2		1		2
	1	6	6	7	7							2	2	10	10	8	8	9	9	8	8
	0					6	6			3	3			1	1						
	.1					3	3			2	1										
	.2	1				1								1				2			
	.3			4			1			1				1							
	.4	1			1					2	1	1		6				3	2		
	.5	1	1	2	1							1			2			3			
a_8	.6	2	1	2	2					2	3	4	1	1	4			2	2		
	.7	3		2	2							2	1		2				3		
	.8		4		2						2		4		1				3		
	.9		2		2							2	4								
	1	2	2					10	10							10	10			10	10
	0					3	3			10	10			9	9	6	6			10	10
	.1																				
	.2					2										2					
	.3					2								1							
	.4					2	1	1							1	1	2				
	.5					1	3									1					
a_9	.6						2	2									1				
	.7						1		2								1				
	.8							1	1												
	.9								1												
	1	10	10	10	10			6	6			10	10					10	10		
	0					3	3	2	2	10	10	8	8	10	10	2	2	10	10		
	.1					1	1									1					
	.2							4								2					
a_{10}	.3					2	1	2	1							1					
	.4					2			4							2	1				
	.5					1	1		1			1				1	2				
	.6						1					1				1	3				
	.7					1	2	2					1				1				
	.8												1				1				
	.9						1		2												
	1	10	10	10	10															10	10

(17.22)

De la misma manera que se ha hecho en anteriores ocasiones, en este cuadro se han recogido en cada casilla las veces que los expertos han asignado una misma valuación a cada relación de incidencia, tanto para el extremo inferior como para el superior de los respectivos intervalos considerados de manera separada.

En cada relación de incidencia se puede observar, de manera muy visible, si existe o no unidad de criterio o si las opiniones convergen en unos niveles muy cercanos o bien se dispersan en estimaciones muy divergentes. Como es lógico se podrían investigar las causas de que se produzca una u otra de estas situaciones, pero hemos querido prescindir voluntariamente de este examen para centrar la atención a la descripción del modelo, respetando escrupulosamente la opinión de cada experto, aunque ésta fuera, a nuestro entender, discutible.

Como ya ha sido señalado, dado que se ha elegido en esta primera parte del tema un procedimiento simplificado, vamos a detener en este punto los resultados de las relaciones existentes entre las "causas" consigo mismas y con las demás "causas" para pasar a la obtención de unas nuevas relaciones.

Para ello se ha construído una nueva matriz Φ-borrosa $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ en la que se relacionan los "efectos" consigo mismos y con los demás "efectos" y se ha solicitado a los mismos 10 expertos que rellenen cada una de las casillas con su opinión expresada, si lo estiman necesario, a través de intervalos de confianza en [0,1]. El resultado ha sido la obtención de las 10 matrices $\underset{\sim}{\mathbf{B}}^{(j)}$ ..., para j = 1, 2,..., 10 que se presentan desde (17.23) a (17. 32).

(17.23)

		1	2	3	4	5	6	7	8
	$\underset{\sim}{B}^{(1)}$	Valor de la empresa	Cotización acciones	Obtención de créditos	Prestigio en el mercado	Expansión comercial	Acuerdos interempresas	Permanencia	Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.6,.8]	[.3,.5]	0	[.1,.3]	[.4,.7]	[.2,.4]
2	Cotización acciones	1	1	[.2,.4]	[.3,.4]	0	0	[.2,.4]	[.2,.4]
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.4,.6]	0	[.7,.9]	0`
4	Prestigio en el mercado	[.5,.7]	[.3,.5]	[.6,.8]	1	1	[.6,.8]	[.6,.8]	[.4,.6]
5	Expansión comercial	.1	[.2,.4]	[.7,.9]	1	1	[.4,.7]	1	[.4,.6]
6	Acuerdos interempresas	0	1	[.6,.8]	[.5,.7]	[.7,.8]	1	[.6,.9]	[.6,.8]
7	Permanencia	0	0	[.2,.4]	[.5,.6]	0	0	1	[.4,.6]
8	Poder político-social	[.2,.5]	0	[.5,.7]	[.6,.8]	[.2,.5]	[.4,.6]	[.5,.7]	1

(17.24)

		1	2	3	4	5	6	7	8
	$\underset{\sim}{B}^{(2)}$	Valor de la empresa	Cotización acciones	Obtención de créditos	Prestigio en el mercado	Expansión comercial	Acuerdos interempresas	Permanencia	Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	1	[.1,.4]	0	0	1	[.6,.8]
2	Cotización acciones	[.6,.9]	1	[.3,.5]	0	0	0	[.3,.5]	.2
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.7,.8]	0	[.7,.9]	0
4	Prestigio en el mercado	[.3,.5]	0	[.6,.8]	1	1	[.6,.8]	1	[.4,.6]
5	Expansión comercial	[.4,.7]	0	[.6,.8]	1	1	[.3,.6]	1	[.3,.5]
6	Acuerdos interempresas	[.2,.4]	.6,.8]	[.4,.6]	[.2,.4]	[.6,.8]	1	[.6,.8]	[.4,.7]
7	Permanencia	0	0	[.4,.7]	[.6,.8]	0	0	1	[.4,.6]
8	Poder político-social	[.3,.5]	0	[.4,.6]	[.2,.4]	0	[.4,.7]	[.6,.7]	1

(17.25)

		1	2	3	4	5	6	7	8
	$\underset{\sim}{B}^{(3)}$	Valor de la empresa	Cotización acciones	Obtención de créditos	Prestigio en el mercado	Expansión comercial	Acuerdos interempresas	Permanencia	Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.6,.8]	0	0	[.3,.5]	[.4,.7]	[.2,.4]
2	Cotización acciones	[.4,.6]	1	0	0	0	[.4,.6]	0	0
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.3,.5]	0	[.7,.9]	0
4	Prestigio en el mercado	[.3,.7]	0	[.6,.8]	1	1	[.5,.7]	[.4,.7]	[.2,.5]
5	Expansión comercial	[.5,.7]	0	[.6,.8]	1	1	[.6,.8]	1	[.5,.7]
6	Acuerdos interempresas	[.2,.4]	[.5,.7]	[.5,.7]	[.5,.7]	[.5,.8]	1	[.7,.9]	[.4,.6]
7	Permanencia	0	0	[.3,.6]	[.4,.7]	0	0	1	[.2,.4]
8	Poder político-social	[.3,.5]	0	[.4,.6]	[.3,.6]	0	[.3,.5]	[.4,.6]	1

(17.26)

		1	2	3	4	5	6	7	8
	$\underset{\sim}{B}^{(4)}$	Valor de la empresa	Cotización acciones	Obtención de créditos	Prestigio en el mercado	Expansión comercial	Acuerdos interempresas	Permanencia	Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.6,.8]	[.2,.4]	0	[.2,.4]	[.7,.9]	0
2	Cotización acciones	[.7,.9]	1	0	[.3,.5]	0	[.3,.5]	[.4,.6]	0
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.4,.6]	0	1	0
4	Prestigio en el mercado	[.6,.8]	[.2,.4]	[.4,.6]	1	1	[.4,.7]	1	[.4,.6]
5	Expansión comercial	[.5,.6]	0	[.5,.8]	1	1	[.6,.8]	1	[.3,.6]
6	Acuerdos interempresas	[.3,.5]	[.3,.5]	[.5,.7]	[.2,.4]	[.6,.7]	1	[.6,.8]	[.3,.5]
7	Permanencia	0	0	[.4,.6]	[.5,.7]	0	0	1	[.5,.7]
8	Poder político-social	[.5,.7]	0	[.5,.7]	[.4,.6]	[.1,.3]	[.2,.4]	[.4,.7]	1

(17.27)

	$\underset{\sim}{B}^{(5)}$	1	2	3	4	5	6	7	8
		Valor de la empresa	Cotización acciones	Obtención de créditos	Prestigio en el mercado	Expansión comercial	Acuerdos interempresas	Permanencia	Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.7,.9]	[.4,.6]	0	0	1	[.2,.4]
2	Cotización acciones	1	1	[.2,.5]	[.3,.6]	0	[.2,.4]	[.2,.5]	0
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.4,.6]	0	[.7,.9]	0
4	Prestigio en el mercado	[.5,.8]	[.3,.5]	[.7,.8]	1	1	[.4,.6]	1	[.3,.6]
5	Expansión comercial	[.5,.6]	0	[.6,.8]	1	1	[.2,.5]	1	[.2,.4]
6	Acuerdos interempresas	[.2,.4]	[.6,.8]	[.5,.7]	[.5,.7]	[.4,.8]	1	[.7,.9]	[.6,.7]
7	Permanencia	0	0	[.4,.7]	[.3,.5]	0	[.2,.4]	1	[.4,.6]
8	Poder político-social	[.2,.5]	0	[.4,.6]	[.3,.6]	[.2,.4]	[.3,.5]	[.4,.6]	1

(17.28)

	$\underset{\sim}{B}^{(6)}$	1	2	3	4	5	6	7	8
		Valor de la empresa	Cotización acciones	Obtención de créditos	Prestigio en el mercado	Expansión comercial	Acuerdos interempresas	Permanencia	Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.7,.9]	[.4,.6]	0	[.2,.4]	[.8,.9]	[.3,.5]
2	Cotización acciones	[.7,.9]	1	[.4,.7]	[.3,.6]	0	[.4,.6]	[.3,.5]	0
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.4,.6]	0	[.7,.8]	0
4	Prestigio en el mercado	[.4,.6]	[.4,.6]	[.3,.6]	1	1	[.4,.6]	[.6,.8]	[.3,.5]
5	Expansión comercial	[.5,.7]	[.2,.5]	[.4,.7]	1	1	[.5,.7]	[.8,.9]	[.3,.5]
6	Acuerdos interempresas	[.4,.6]	[.5,.7]	[.4,.6]	[.3,.5]	[.4,.8]	1	[.6,.8]	[.3,.5]
7	Permanencia	0	0	[.5,.7]	[.3,.5]	[.2,.4]	0	1	[.4,.6]
8	Poder político-social	[.3,.5]	0	[.5,.7]	[.2,.4]	[.4,.6]	[.3,.6]	[.4,.7]	1

(17.29)

	$\underset{\sim}{B}^{(7)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.6,.8]	[.4,.6]	0	[.5,.7]	[.7,.9]	.1
2	Cotización acciones	[.6,.9]	1	[.2,.4]	[.5,.7]	0	[.4,.6]	[.3,.6]	0
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.1,.2]	0	[.7,.9]	0
4	Prestigio en el mercado	[.4,.5]	[.2,.4]	[.4,.6]	1	1	[.3,.5]	[.7,.8]	[.4,.6]
5	Expansión comercial	[.3,.6]	.1	[.3,.5]	1	1	[.4,.6]	1	[.2,.4]
6	Acuerdos interempresas	[.3,.5]	[.4,.7]	[.4,.6]	[.2,.4]	[.5,.7]	1	[.6,.8]	[.5,.8]
7	Permanencia	0	0	[.4,.6]	[.3,.6]	0	0	1	[.4,.6]
8	Poder político-social	[.2,.4]	0	[.3,.5]	[.5,.7]	[.3,.5]	[.4,.6]	[.3,.5]	1

(17.30)

	$\underset{\sim}{B}^{(8)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.3,.6]	[.2,.4]	0	[.3,.6]	[.6,.8]	[.1,.3]
2	Cotización acciones	[.4,.8]	1	[.1,.3]	[.4,.5]	0	[.3,.5]	[.2,.3]	0
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.4,.5]	0	[.6,.8]	0
4	Prestigio en el mercado	[.3,.4]	[.2,.4]	[.4,.6]	1	1	[.5,.7]	[.8,.9]	[.2,.5]
5	Expansión comercial	[.1,.3]	0	[.3,.5]	1	1	[.6,.8]	1	[.2,.4]
6	Acuerdos interempresas	[.1,.3]	[.4,.6]	[.4,.6]	[.2,.4]	[.4,.7]	1	[.5,.6]	[.4,.7]
7	Permanencia	0	0	0	[.4,.6]	0	0	1	[.1,.4]
8	Poder político-social	[.2,.5]	[.2,.4]	[.3,.6]	[.4,.6]	0	[.2,.6]	[.2,.6]	1

(17.31)

	$\underset{\sim}{B}^{(9)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.4,.6]	[.3,.6]	.2	[.2,.4]	[.7,.9]	[.3,.5]
2	Cotizaciones acciones	[.3,.6]	1	[.2,.4]	[.3,.5]	0	[.1,.4]	[.1,.3]	0
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.5,.7]	0	[.6,.8]	0
4	Prestigio en el mercado	[.3,.4]	[.2,.3]	[.4,.6]	1	1	[.4,.6]	[.4,.7]	[.3,.6]
5	Expansión comercial	0	0	[.2,.5]	1	1	[.5,.7]	1	[.2,.5]
6	Acuerdos interempresas	[.2,.4]	[.4,.6]	[.5,.7]	[.3,.5]	[.6,.8]	1	[.6,.8]	[.5,.7]
7	Permanencia	0	0	[.3,.5]	[.2,.5]	0	0	1	[.2,.4]
8	Poder político-social	[.3,.5]	.1	[.3,.6]	[.1,.4]	0	[.2,.4]	[.3,.5]	1

(17.32)

	$\underset{\sim}{B}^{(10)}$	1 Valor de la empresa	2 Cotización acciones	3 Obtención de créditos	4 Prestigio en el mercado	5 Expansión comercial	6 Acuerdos interempresas	7 Permanencia	8 Poder político-social
1	Valor de la empresa	1	1	[.5,.7]	[.3,.6]	0	[.3,.5]	1	[.2,.4]
2	Cotización acciones	[.4,.5]	1	[.3,.6]	[.2,.5]	0	.1	[.2,.3]	0
3	Obtención de créditos	0	0	1	0	[.4,.6]	0	[.7,.9]	0
4	Prestigio en el mercado	[.2,.4]	[.2,.4]	[.4,.6]	1	1	[.4,.7]	[.5,.8]	[.2,.4]
5	Expansión comercial	0	0	[.3,.5]	1	1	[.4,.6]	[.8,.9]	[.4,.6]
6	Acuerdos interempresas	[.2,.5]	[.3,.5]	[.4,.7]	[.2,.4]	[.7,.8]	1	.9	[.4,.6]
7	Permanencia	0	0	[.2,.5]	.2	0	0	1	.1
8	Poder político-social	[.2,.4]	0	[.4,.7]	[.2,.5]	0	[.1,.3]	[.4,.6]	1

De la misma manera que se ha realizado con las matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{(j)}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(j)}$ se construye ahora una estadística, a partir de las matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{B}}_{(j)}$, en la que se recogen para cada relación de incidencia ($b_i \rightarrow b_j$) las veces que los expertos han asignado una misma valuación, tanto como extremo inferior (a la izquierda de la casilla) como por extremo superior (a la derecha de la casilla). El resultado se expresa en (17.33).

		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7		b_8	
b_1	0							1	1	9	9	2	2			1	1
	.1							1				1				2	1
	.2							2		1	1	3				4	
	.3					1		3				3	1			2	1
	.4					1		3	3				3	2			4
	.5					1			1			1	2				2
	.6					4	2		5				1	1		1	
	.7					2	1						1	3	2		
	.8						4							1	1		1
	.9						2								4		
	1	10	10	10	10	1	1							3	3		
b_2	0					2	2	2	2	10	10	2	2	1	1	8	8
	.1					1						2	1	1			
	.2					4		1				1		4		2	1
	.3	1				2	1	5				2		3	3		
	.4	3				1	3	1	1			3	2	1	1		1
	.5		1				2	1	4				2		3		
	.6	2	2				1		2				3		2		
	.7	2					1		1								
	.8		1														
	.9		4														
	1	2	2	10	10												
b_3	0	10	10	10	10			10	10			10	10			10	10
	.1									1							
	.2										1						
	.3									1							
	.4									6							
	.5									1	2						
	.6										5			2			
	.7									1	1			7			
	.8										1				3		
	.9														6		
	1					10	10							1	1		
b_4	0			2	2												
	.1																
	.2	1		5												3	
	.3	4		2	1	1						1				3	
	.4	2	3	1	4	5						5		2		4	1
	.5	2	2		2							2	1	1			3
	.6	1	1		1	3	6					2	3	2			6
	.7		2			1							4	1	2		
	.8		2				4						2	1	4		
	.9														1		
	1							10	10	10	10			3	3		

		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7		b_8	
b_5	0	2	2	7	7												
	.1	2	1	1	1												
	.2			2		1						1				4	
	.3	1	1			3						1				3	
	.4	1			1	1						3				2	3
	.5	4			1	1	4					2	1			1	3
	.6		3			3						3	3				3
	.7		3			1	1						3				1
	.8						4						3	2			
	.9						1								2		
	1							10	10	10	10			8	8		
b_6	0	1	1														
	.1	1															
	.2	5						5									
	.3	2	1	2				2								2	
	.4	1	4	3		5			5	3						4	
	.5		3	2	2	4		3	2	2				1		2	2
	.6		1	2	2	1	4			3				6	1	2	2
	.7				3		5		3	2	3			2			4
	.8				2		1				7				5		2
	.9													1	4		
	1			1	1							10	10				
b_7	0	10	10	10	10	1	1			9	9	9	9				
	.1															2	1
	.2					2		2	1	1		1				2	
	.3					2		3									
	.4					4	1	2			1		1			5	3
	.5					1	2	2	3							1	
	.6						3	1	3								5
	.7						3		2								1
	.8								1								
	.9																
	1													10	10		
b_8	0			8	8					5	5						
	.1			1	1			1		1		1					
	.2	5		1				3		2		3		1			
	.3	4				3		2		1	1	3	1	2			
	.4		2		1	4		2	3	1	1	3	2	5			
	.5	1	7			3	1	1	1		2		2	1	2		
	.6						5	1	4		1		4	1	4		
	.7		1				4		1				1		4		
	.8								1								
	.9																
	1															10	10

(17.33)

Si se consideran los cuadros estadísticos (17.11), (17.22) y (17.33) como recopilación de las opiniones de los 10 expertos en cuanto a las relaciones de incidencia a a_i sobre b_j, de a_i sobre a_j y de b_i sobre b_j, y se desean obtener las medias de cada nivel bastará, en este caso, dividir las cifras que aparecen en cada casilla por 10. Creemos innecesario reproducir los tres correspondientes cuadros ya que aparecerían las mismas cifras con un punto delante (excepto, evidentemente, para la cifra 10, en donde se colocaría la unidad).

1) Método aproximado con utilización de medias

Como ya se ha señalado, vamos a prescindir en esta aplicación del método riguroso que entrañaría seguir un camino paralelo al del epígrafe anterior duplicando las operaciones para el extremo inferior y superior del intervalo, para utilizar en primer lugar una variante menos rigurosa, pero muy cómoda por su simplicidad, que consiste en operar a partir de las medias obtenidas de los cuadros estadísticos (17.11), (17.22) y (17.33) convenientemente transformados (dividiendo las cifras de cada casilla por 10).

A título indicativo se incluyen algunos cálculos para cada matriz. Así:

(*) Para las matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{(j)}$ se tendrá:

$$a_1 \rightarrow b_1$$

Extremo inferior: $M_* (a_1,b_1) = (0.8)(0.1) + (0.9)(0.2) + (1)(0.7) = 0.96$
(17.34)

Extremo superior: $M^* (a_1,b_1) = (0.9)(0.3) + (1)(0.7) = 0.97$
(17.35)

$$a_1 \rightarrow b_2$$

Extremo inferior: $M_* (a_1, b_2) = (0.8)(0.4) + (0.9)(0.5) + (1)(0.1) = 0.87$
(17.36)

Extremo superior: $M^* (a_1, b_2) = (0.8)(0.2) + (0.9)(0.7) + (1)(0.1) = 0.89$
(17.37)

$$a_1 \rightarrow b_3$$

Extremo inferior: $M_* (a_1,b_3) = (0.6)(0.2) + (0.7)(0.3) + (0.8)(0.1) + (1)(0.4)$
(17.38) $= 0.81$

Extremo superior: $M^* (a_1, b_3) = (0.7)(0.1) + (0.8)(0.2) + (0.9)(0.3) +$
(17.39) $(1)(0.4) = 0.90$

....

(*) Para las matrices $\underset{\sim}{A}^{(j)}$ se tendrá:

$a_1 \rightarrow a_1$

Extremo inferior: $M_* (a_1, a_1) = (1)(1) = 1$
(17.40)

Extremo superior: $M^* (a_1, a_1) = (1)(1) = 1$
(17.41)

$a_1 \rightarrow a_2$

Extremo inferior: $M_* (a_1, a_2) = (0)(0.5) + (0.1)(0.2) + (0.2)(0.2) + (0.3)(0.1)$
(17.42) $= 0.09$

Extremo superior: $M^* (a_1, a_2) = (0)(0.5) + (0.1)(0.1) + (0.2)(0.1) + (0.3)(0.1)$
(17.43) $+ (0.4)(0.2) = 0.14$

$a_1 \rightarrow a_3$

Extremo inferior: $M_* (a_1, a_3) = (0.4)(0.1) + (0.6)(0.2) + (0.7)(0.4) + (1)(0.3)$
(17.44) $= 0.74$

Extremo superior: $M^* (a_1, a_3) = (0.6)(0.1) + (0.8)(0.3) + (0.9)(0.3) + (1)(0.3)$
(17.45) $= 0.87$

....

(*) Para las matrices $\underset{\sim}{B}^{(j)}$ se tendrá:

$b_1 \rightarrow b_1$

Extremo inferior $M_* (b_1, b_1) = (1)(1) = 1$
(17.46)

Extremo superior: $M^* (b_1, b_1) = (1)\ (1) = 1$
(17.47)

$$b_1 \rightarrow b_2$$

Extremo inferior: $M_* (b_1, b_2) = (1)\ (1) = 1$
(17.48)

Extremo superior: $M^* (b_1, b_2) = (1)\ (1) = 1$
(17.49)

$$b_1 \rightarrow b_3$$

Extremo inferior: $M_* (b_1, b_3) = (0.3)\ (0.1) + (0.4)\ (0.1) + (0.5)\ (0.1) + (0.6)\ (0.4)$
(17.50) $+ (0.7)\ (0.2) + (1)\ (0.1) = 0.60$

Extremo superior: $M^* (b_1, b_3) = (0.6)\ (0.2) + (0.7)\ (0.1) + (0.8)\ (0.4) + (0.9)\ (0.2)$
(17.51) $+ (1)\ (0.1) = 0.79$

....

Una vez halladas todas las medias relativas a cada relación de incidencia de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(j)}, \underset{\sim}{\mathcal{A}}^{(j)}, \underset{\sim}{\mathcal{B}}^{(j)}$ se construirán tres nuevas matrices $M(\underset{\sim}{\mathcal{M}})$, $M(\underset{\sim}{\mathcal{A}})$, y $M(\underset{\sim}{\mathcal{B}})$ presentadas en (17.52), (17.53) y (17.54). Estas matrices constituyen , en cierto modo, la opinión agregada de todos los expertos. Al considerarlas como representativas se simplifica, evidentemente, el problema, pero se deja atrás toda la información que representa el disponer de los datos incluídos en el expertón. Se podrá observar que en estas matrices hemos dejado de colocar los corchetes característicos de los intervalos de confianza. El único motivo ha sido el de evitar hacer más grande el espacio dedicado a cada casilla.

$M\left(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}\right)=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.96,.97	.87,.89	.81,.90	.35,.49	.49,.70	.25,.36	.96,.98	.46,.64
a_2	.09,.14	.05,.08	.45,.65	.43,.63	.24,.44	.13,.26	.43,.62	.03
a_3	.37,.52	.07,.08	.74,.87	.48,.64	.38,.50	.17,.24	.84,.94	.42,.54
a_4	.10,.15	0	.09,.14	.16,.24	.38,.58	.24,.40	.54,.72	.91,.95
a_5	.12,.18	.02,.02	.10,.15	.13,.23	.04,.08	.24,.38	.59,.74	1
a_6	.19,.24	0	.56,.71	.37,.51	.55,.75	.10,.17	.41,.59	0
a_7	.43,.64	.04,.06	.57,.72	.56,.78	.68,.81	.39,.59	.84,.92	.77,.90
a_8	.38,.59	0	.38,.53	.58,.71	.38,.53	.18,.31	.92,.98	.02
a_9	0	0	.11,.20	.92,.95	.97,.99	.36,.51	.87,.93	0
a_{10}	0	0	.06,.09	1	.98,.99	.44,.65	.97,.97	0

(17.52)

$M\left(\underset{\sim}{\mathcal{A}}\right)=$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_1	1	.09,.14	.74,.87	.01,.01	.28,.43	.34,.56	.08,.15	.54,.73	.20,.33	.12,.18
a_2	1	1	.66,.83	.74,.84	.05,.09	.87,.95	.04,.09	.56,.76	.06,.08	.03,.05
a_3	.36,.59	0	1	0	.08,.15	.54,.74	0	.42,.64	.07,.14	.04,.09
a_4	.57,.74	.59,.77	.17,.29	1	1	.10,.16	.30,.49	.20,.36	.09,.14	.09,.13
a_5	.51,.70	.36,.50	.08,.16	.58,.76	1	0	.30,.49	.10,.17	.01	.03,.06
a_6	.39,.59	.39,.58	.80,.89	.03,.07	0	1	0	.01,.04	.27,.41	.03,.05
a_7	.91,.96	.92,.95	.49,.71	.43,.61	.28,.49	.60,.76	1	.97,.98	.98,.99	.94,.98
a_8	.64,.81	.48,.69	.05,.06	1	.25,.39	.65,.81	.35,.56	1	.43,.65	1
a_9	1	1	.23,.38	.84,.91	0	1	.03,.04	.13,.21	1	0
a_{10}	1	1	.27,.38	.28,.42	0	.11,.15	0	.27,.47	0	1

(17.53)

$M(\underset{\sim}{\mathcal{B}}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	.60,.79	.26,.47	.02,.02	.21,.38	.73,.88	.22,.38
b_2	.61,.81	1	.19,.38	.26,.43	0	.22,.37	.22,.40	.04,.06
b_3	0	0	1	0	.40,.57	0	.71,.88	0
b_4	.38,.58	.20,.35	.48,.68	1	1	.45,.67	.70,.85	.31,.55
b_5	.29,.43	.05,.10	.45,.68	1	1	.45,.68	.96,.98	.30,.52
b_6	.21,.40	.50,.69	.46,.67	.31,.51	.54,.77	1	.64,.82	.44,.66
b_7	0	0	.31,.53	.37,.57	.02,.04	.02,.04	1	.31,.50
b_8	.27,.50	.03,.05	.40,.63	.32,.56	.12,.23	.28,.52	.39,.62	1

(17.54)

Vamos a operar ahora como si tratara de la opinión de un sólo experto expresada a través de matrices Φ-borrosas, es decir que cada relación de incidencia quedará representada a través de un intervalo de confianza. En esta ocasión el hipotético experto utilizará 101 niveles en lugar de 11, sensibilizando su opinión en centésimas a diferencia de lo que estamos acostumbrados a realizar (en decimales) cuando utilizamos el sistema endecadario.

Como es sabido, debe realizarse seguidamente la convolución de las matrices $M(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathcal{B}})$ con objeto de obtener la acumulación de efectos de primera y segunda generación. Hallemos en primer lugar la matriz $M(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathcal{M}})$ que se presenta en (17.55).

$$M(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}) =$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.96,.97	.87,.89	.81,.90	.54,.71	.49,.70	.25,.38	.96,.98	.46,.64
a_2	.96,.97	.87,.89	.81,.90	.56,.71	.55,.75	.25,.40	.96,.98	.74,.84
a_3	.38,.59	.36,.59	.74,.87	.48,.64	.54,.74	.25,.36	.84,.94	.42,.59
a_4	.57,.74	.57,.74	.57,.74	.43,.63	.49,.70	.30,.49	.59,.74	1
a_5	.51,.70	.51,.70	.51,.70	.36,.50	.49,.70	.30,.49	.59,.74	1
a_6	.39,.59	.39,.59	.74,.87	.48,.64	.55,.75	.27,.41	.80,.89	.42,.59
a_7	.91,.96	.87,.89	.81,.90	.94,.98	.97,.99	.44,.65	.94,.98	.77,.90
a_8	.64,.81	.64,.81	.64,.81	1	.98,.99	.44,.65	.97,.98	.91,.95
a_9	.96,.97	.87,.89	.81,.90	.92,.95	.97,.99	.36,.51	.96,.98	.84,.91
a_{10}	.96,.97	.87,.89	.81,.90	1	.98,.99	.44,.65	.97,.98	.46,.64

(17.55)

Para obtener finalmente $M(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathcal{B}})$ bastará realizar la convolución de $M(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ con $M(\underset{\sim}{\mathcal{B}})$ lo que dará lugar a la matriz (17.56).

$$M(\underset{\sim}{\mathcal{A}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathcal{M}}) \circ M(\underset{\sim}{\mathcal{B}}) =$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.54,.71	.54,.71	.45,.68	.96,.98	.46,.64
a_2	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.56,.75	.56,.75	.45,.68	.96,.98	.74,.84
a_3	.38,.59	.38,.59	.74,.87	.54,.74	.54,.74	.45,.68	.84,.94	.42,.59
a_4	.57,.74	.57,.74	.57,.74	.49,.70	.49,.70	.45,.68	.59,.74	1
a_5	.51,.70	.51,.70	.51,.70	.49,.70	.49,.70	.45,.68	.59,.74	1
a_6	.39,.59	.39,.59	.74,.87	.55,.75	.55,.75	.45,.68	.80,.89	.42,.59
a_7	.91,.96	.91,.96	.81,.90	.97,.99	.97,.99	.45,.68	.96,.98	.77,.90
a_8	.64,.81	.64,.81	.64,.81	1	1	.45,.68	.97,.98	.91,.95
a_9	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.97,.99	.97,.99	.45,.68	.96,.98	.84,.91
a_{10}	.96,.97	.96,.97	.81,.90	1	1	.45,.68	.97,.98	.46,.65

(17.56)

Con objeto de poner de manifiesto los efectos olvidados se establecerá una comparación entre la matriz (17.56), que proporciona los efectos acumulados de 1ª. y 2ª. generación, y la matriz (17.52), representativa de los efectos de 1ª. generación. Para ello será necesario reducir los intervalos de confianza a números ordinarios, aún a costa de perder los grados de libertad en la expresión de los resultados, en coherencia con el planteamiento del modelo.

Esta restricción resulta necesaria dado que no siempre existe un orden estricto entre dos o más intervalos de confianza. Para realizar esta comparación se acostumbra a obtener el valor medio de cada intervalo como mejor representación del mismo. Así, las dos matrices (17.52) y (17.56) se convertirán en las (17.57) y (17.58).

$\overline{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.965	.880	.855	.420	.595	.305	.970	.550
a_2	.115	.065	.550	.530	.340	.195	.525	.030
a_3	.445	.075	.805	.560	.440	.205	.890	.480
a_4	.125	0	.115	.200	.480	.320	.630	.930
a_5	.150	.020	.125	.180	.060	.310	.665	1
a_6	.215	0	.635	.440	.650	.135	.500	0
a_7	.535	.050	.645	.670	.745	.490	.880	.835
a_8	.485	0	.455	.645	.455	.245	.950	.020
a_9	0	0	.155	.935	.980	.435	.900	0
a_{10}	0	0	.075	1	.985	.545	.970	0

(17.57)

$\overline{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.965	.965	.855	.625	.625	.565	.970	.550
a_2	.965	.965	.855	.655	.655	.565	.970	.790
a_3	.485	.485	.805	.640	.640	.565	.890	.505
a_4	.655	.655	.655	.595	.595	.565	.665	1
a_5	.605	.605	.605	.595	.595	.565	.665	1
a_6	.490	.490	.805	.650	.650	.565	.845	.505
a_7	.935	.935	.855	.980	.980	.565	.970	.835
a_8	.725	.725	.725	1	1	.565	.975	.930
a_9	.965	.965	.855	.980	.980	.565	.970	.875
a_{10}	.965	.965	.855	1	1	.565	.975	.555

(17.58)

La comparación de estas matrices va a poner de manifiesto los efectos olvidados. Para ello bastará obtener la diferencia entre cada elemento de $\overline{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*)$ y su correspondiente $\overline{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$. El resultado se ha presentado en (17.59).

$$\bar{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*) - \bar{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}) =$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	0	.085	0	.205	.030	.260	0	0
a_2	.850	.900	.300	.125	.315	.370	.445	.760
a_3	.040	.410	0	.080	.200	.125	0	.025
a_4	.530	.655	.540	.395	.115	.245	.035	.070
a_5	.455	.585	.480	.415	.535	.255	0	0
a_6	.275	.490	.170	.210	0	.430	.345	.505
a_7	.400	.885	.210	.210	.235	.075	.090	0
a_8	.240	.725	.270	.355	.545	.320	.025	.910
a_9	.965	.965	.700	.045	0	.130	.070	.875
a_{10}	.965	.965	.780	0	.015	.020	.005	.555

(17.59)

Una simple mirada a la matriz (17.59) permite detectar aquellos efectos cuyo olvido ha sido más intenso. Así aparecen las relaciones ($a_9 \rightarrow b_1$) y ($a_9 \rightarrow b_2$) incidencia de la "gama de productos" sobre el "valor de la empresa" y "cotización de acciones" respectivamente y ($a_{10} \rightarrow b_1$), ($a_{10} \rightarrow b_2$) incidencia respectiva de la "calidad del producto" tambien sobre el "valor de la empresa" y la "cotización de las acciones". A un nivel de olvido inferior hay que considerar las relaciones ($a_8 \rightarrow b_8$) incidencia del "grado tecnológico" sobre el "poder político-social" y ($a_2 \rightarrow b_2$) de la "facturación" sobre la "cotización de las acciones".

Antes de finalizar las consideraciones sobre este método simplificado, deseamos hacer constar que la investigación de los efectos olvidados no es otra cosa que unos mecanismos de alerta que permiten poner de manifiesto el grave problema del olvido, susceptibles de utilización en los ámbitos más diveros. El "grado de olvido", que en nuestro caso sería 0.965 para la relación (a_9, b_2) o de 0.910 para la relación (a_8, b_8), por ejemplo, tiene un interés secundario, sobre todo teniendo en cuenta el contexto de subjetividad en el que nos movemos. De ahí el interés que puede adquirir este esquema simplificado para una gran variedad de posibles aplicaciones.

2º Método genuino por expertones

La utilización del método con toda su rigurosidad alarga evidentemente el proceso de cálculo, aunque permite aprovechar la riqueza de información derivada de los expertones.

Si se parte de la misma información suministrada por los 10 expertos, contenida en (17.11), (17.22) y (17.33), y se obtienen las probabilidades acumuladas, tanto para las inferiores (colocadas a la izquierda de cada casilla) como para las superiores (a la derecha) se obtendrán las matrices de incidencia por expertones (17.60), (17.61) y (17.62).

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}} =$

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	.8 1	1 1	1 1
	.3	1 1	1 1	1 1	.9 .9	1 1	.4 .7	1 1	1 1
	.4	1 1	1 1	1 1	.5 .9	.8 1	.1 .5	1 1	.8 1
	.5	1 1	1 1	1 1	.1 .8	.6 1	.1 .1	1 1	.5 1
	.6	1 1	1 1	1 1	0 .2	.4 .9	.1 .1	1 1	.2 .8
	.7	1 1	1 1	.8 1	0 .1	.1 .8	0 .1	1 1	.1 .4
	.8	1 1	1 1	.5 .9	0 0	0 .3	0 .1	1 1	0 .1
	.9	.9 1	.6 .8	.4 .7	0 0	0 0	0 0	.8 1	0 .1
	1	.7 .7	.1 .1	.4 .4	0 0	0 0	0 0	.8 .8	0 0
a_2	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.6 .6	.3 .3	1 1	1 1	1 1	.7 .8	1 1	.3 .3
	.2	.2 .5	.2 .3	1 1	1 1	.8 .9	.4 .6	1 1	0 0
	.3	.1 .2	0 .2	.9 1	1 1	.4 .8	.2 .5	.8 1	0 0
	.4	0 .1	0 0	.8 1	.8 .1	.2 .8	0 .4	.8 .9	0 0
	.5	0 0	0 0	.5 .9	.4 .9	0 .6	0 .3	.4 .9	0 0
	.6	0 0	0 0	.3 .9	.1 .7	0 .3	0 0	.3 .8	0 0
	.7	0 0	0 0	0 ..4	0 .5	0 0	0 0	0 .4	0 0
	.8	0 0	0 0	0 .3	0 .1	0 0	0 0	0 .2	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
a_3	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.4 .4	1 1	1 1	.9 .9	.9 .9	1 1	1 1
	.2	.9 .9	.3 .3	1 1	1 1	.9 .9	.4 .5	1 1	1 1
	.3	.7 .9	0 .1	1 1	.8 1	.8 .8	.2 .4	1 1	.9 .9
	.4	.5 .8	0 0	1 1	.8 .8	.7 .8	2. .3	1 1	.7 .9
	.5	.3 .6	0 0	1 1	.6 .8	.5 .8	0 ..2	1 1	.4 .8
	.6	.3 .5	0 0	.9 1	.6 .8	0 .6	0 .1	1 1	.2 .5
	.7	0 .3	0 0	.6 1	0 .7	0 .2	0 0	.8 1	0 .3
	.8	0 .2	0 0	.3 .9	0 .3	0 0	0 0	.7 1	0 0
	.9	0 0	0 0	.3 .5	0 0	0 0	0 0	.5 .8	0 0
	1	0 0	0 0	.3 .3	0 0	0 0	0 0	.4 .6	0 0
a_4	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.5 .5	0 0	.6 .6	.6 .6	1 1	.9 .9	1 1	1 1
	.2	.3 .4	0 0	.2 .4	.5 .5	.9 1	.6 .6	1 1	1 1
	.3	.2 .3	0 0	.1 .3	.3 .5	.9 .9	.4 .6	1 1	1 1
	.4	0 .2	0 0	0 .1	.1 .4	.7 .9	.3 .6	.9 1	1 1
	.5	0 .1	0 0	0 0	.1 .3	.3 .9	.1 .6	.7 1	1 1
	.6	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 .7	.1 .4	.6 .8	1 1
	.7	0 0	0 0	0 0	0 0	0 .3	0 .2	.2 .8	1 1
	.8	0 0	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 .1	0 .5	.9 1
	.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 .1	.7 .9
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	.5 .6
a_5	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.4 .4	.1 .1	.3 .3	.5 .5	.3 .3	.9 .9	1 1	1 1
	.2	.3 .3	.1 .1	.3 .3	.4 .4	.1 .2	.7 .8	1 1	1 1
	.3	.3 .3	0 0	.2 .3	.3 .4	0 .2	.5 .8	1 1	1 1
	.4	.2 .3	0 0	.1 .3	.1 .4	0 .1	.2 .5	1 1	1 1
	.5	0 .2	0 0	.1 .2	0 .3	0 0	.1 .4	.7 1	1 1
	.6	0 .1	0 0	0 .1	0 .2	0 0	0 .4	.5 1	1 1
	.7	0 .1	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0	.3 .8	1 1
	.8	0 .1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	.2 .4	1 1
	.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	.2 .2	1 1
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_6	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.9 .9	0 0	1 1	.9 .9	1 1	.4 .4	1 1	0 0
	.2	.5 .6	0 0	1 1	.8 .9	1 1	.3 .3	1 1	0 0
	.3	.3 .4	0 0	1 1	.7 .8	1 1	.3 .3	.7 1	0 0
	.4	.1 .3	0 0	1 1	.6 .8	1 1	0 .3	.6 .8	0 0
	.5	.1 .2	0 0	.7 1	.4 .7	.7 1	0 .3	.3 .8	0 0
	.6	0 0	0 0	.6 1	.1 .5	.6 1	0 .1	.2 .6	0 0
	.7	0 0	0 0	.2 .7	.1 .3	.1 .9	0 0	.1 .4	0 0
	.8	0 0	0 0	.1 .4	.1 .1	.1 .5	0 0	.1 .2	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 .1	0 0	.1 .1	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
a_7	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.9 .9	.3 .3	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	.9 .9	.1 .2	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	.9 .9	0 .1	1 1	.9 1	1 1	.9 1	1 1	1 1
	.4	.9 .9	0 0	1 1	.9 1	1 1	.8 1	1 1	1 1
	.5	.5 .9	0 0	.7 1	.7 .9	1 1	.1 1	1 1	1 1
	.6	.2 .9	0 0	.5 .9	.5 .9	.8 1	.1 .4	1 1	1 1
	.7	0 .7	0 0	.2 .8	.4 .9	.4 .9	0 .3	.9 1	.8 1
	.8	0 .3	0 0	.2 .3	.2 .7	.4 .7	0 .2	.7 1	.6 1
	.9	0 0	0 0	.1 .2	0 .3	.2 .3	0 0	.6 .9	.2 .8
	1	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 .2	0 0	.2 .3	.1 .2
a_8	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	0 0	1 1	1 1	.9 .9	.8 .8	1 1	.2 .2
	.2	1 1	0 0	.8 1	.9 1	.8 .8	.6 .7	1 1	0 0
	.3	.9 1	0 0	.7 .9	.9 1	.8 .8	.3 .7	1 1	0 0
	.4	.5 .9	0 0	.6 .7	.8 .9	.5 .8	.1 .6	1 1	0 0
	.5	.3 .9	0 0	.4 .6	.6 .9	.4 .6	0 .2	1 1	0 0
	.6	.1 .7	0 0	.3 .5	.6 .9	.2 .5	0 .1	1 1	0 0
	.7	0 .4	0 0	0 .5	.5 .6	.1 .5	0 0	.9 1	0 0
	.8	0 0	0 0	0 .1	.3 .5	.1 .3	0 0	.9 1	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	.1 .2	0 .1	0 0	.7 .9	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	.1 .1	0 0	0 0	.7 .9	0 0
a_9	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	0 0	0 0	.6 .6	1 1	1 1	.8 .8	1 1	0 0
	.2	0 0	0 0	.3 .5	1 1	1 1	.8 .8	1 1	0 0
	.3	0 0	0 0	.2 .5	1 1	1 1	.7 .8	1 1	0 0
	.4	0 0	0 0	0 .4	1 1	1 1	.6 .8	1 1	0 0
	.5	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	.5 .8	1 1	0 0
	.6	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	.2 .7	1 1	0 0
	.7	0 0	0 0	0 0	.8 1	1 1	0 .4	.9 1	0 0
	.8	0 0	0 0	0 0	.8 .9	.9 1	0 0	.8 1	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	.8 .8	.9 1	0 0	.6 .9	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	.8 .8	.9 .9	0 0	.4 .4	0 0
a_{10}	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	0 0	0 0	.3 .3	1 1	1 1	1 1	1 1	0 0
	.2	0 0	0 0	.1 .2	1 1	1 1	1 1	1 1	0 0
	.3	0 0	0 0	.1 .2	1 1	1 1	.9 1	1 1	0 0
	.4	0 0	0 0	.1 .1	1 1	1 1	.7 1	1 1	0 0
	.5	0 0	0 0	0 .1	1 1	1 1	.4 1	1 1	0 0
	.6	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	.4 .8	1 1	0 0
	.7	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 .6	1 1	0 0
	.8	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 .1	1 1	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	1 1	.9 1	0 0	1 1	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	1 1	.9 .9	0 0	.7 .7	0 0

(17..60)

$\underset{\sim}{A} =$

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.5 .5	1 1	.1 .1	.8 .8	1 1	.3 .3	1 1	.9 .9	.7 .7
	.2	1 1	.3 .4	1 1	0 0	.6 .7	.9 .9	.2 .3	1 1	.7 .8	.4 .6
	.3	1 1	.1 .3	1 1	0 0	.5 .7	.8 .9	.2 .3	1 1	.2 .8	.1 .4
	.4	1 1	0 .2	1 1	0 0	.4 .7	.6 .9	.1 .2	1 1	.2 .6	0 .1
a_1	.5	1 1	0 0	.9 1	0 0	.2 .5	.1 .8	0 .2	.8 1	0 .1	0 0
	.6	1 1	0 0	.9 1	0 0	.2 .4	0 .8	0 .2	.5 1	0 .1	0 0
	.7	1 1	0 0	.7 .9	0 0	.1 .3	0 .3	0 0	.1 .7	0 0	0 0
	.8	1 1	0 0	.3 .9	0 0	0 .2	0 0	0 0	0 .5	0 0	0 0
	.9	1 1	0 0	.3 .6	0 0	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0
	1	1 1	0 0	.3 .3	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	1 1	.3 .3	1 1	.2 .2	1 1	.3 .3	.2 .2
	.2	1 1	1 1	1 1	1 1	.1 .2	1 1	.2 .2	1 1	.1 .1	.1 .1
	.3	1 1	1 1	1 1	1 1	.1 .2	1 1	0 .2	1 1	.1 .1	0 .1
	.4	1 1	1 1	.9 1	.9 1	0 .1	1 1	0 .2	1 1	.1 .1	0 .1
a_2	.5	1 1	1 1	.7 1	.8 1	0 .1	1 1	0 .1	.8 1	0 .1	0 0
	.6	1 1	1 1	.7 1	.7 1	0 0	1 1	0 0	.5 1	0 .1	0 0
	.7	1 1	1 1	.4 .8	.6 .8	0 0	.9 1	0 0	.2 .9	0 0	0 0
	.8	1 1	1 1	.3 .7	.5 .6	0 0	.8 1	0 0	.1 .5	0 0	0 0
	.9	1 1	1 1	.3 .5	.5 .6	0 0	.5 .8	0 0	0 .2	0 0	0 0
	1	1 1	1 1	.3 .3	.4 .4	0 0	.5 .7	0 0	0 0	0 0	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	0 0	1 1	0 0	.4 .4	1 1	0 0	1 1	.3 .3	.2 .2
	.2	1 1	0 0	1 1	0 0	.3 .3	1 1	0 0	.9 .9	.1 .3	.1 .2
	.3	.7 1	0 0	1 1	0 0	.1 .3	1 1	0 0	.9 .9	.1 .3	.1 .2
	.4	.7 1	0 0	1 1	0 0	0 .3	1 1	0 0	.7 .9	.1 .2	0 .1
a_3	.5	.2 .8	0 0	1 1	0 0	0 .1	.7 1	0 0	.4 .9	.1 .1	0 .1
	.6	0 .7	0 0	1 1	0 0	0 .1	.6 1	0 0	.3 .8	0 .1	0 .1
	.7	0 .4	0 0	1 1	0 0	0 0	.1 1	0 0	0 .6	0 .1	0 0
	.8	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 .4	0 0	0 .4	0 0	0 0
	.9	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.7 .7	1 1	1 1	.5 .5	.9 .9	.7 .7	.5 .5	.3 .3
	.2	1 1	1 1	.7 .7	1 1	1 1	.4 .4	.9 .9	.6 .7	.3 .3	.3 .3
	.3	1 1	1 1	.3 .5	1 1	1 1	.1 .3	.5 .9	.3 .7	.1 .3	.2 .3
	.4	1 1	.9 1	0 .5	1 1	1 1	0 .3	.4 .8	.2 .7	0 .3	.1 .3
a_4	.5	.8 1	.7 1	0 .4	1 1	1 1	0 .1	.2 .7	.2 .4	0 0	0 .1
	.6	.5 1	.6 1	0 .1	1 1	1 1	0 0	.1 .4	0 .2	0 0	0 0
	.7	.2 .8	.4 .8	0 0	1 1	1 1	0 0	0 .2	0 .2	0 0	0 0
	.8	.1 .5	.1 .6	0 0	1 1	1 1	0 0	0 .1	0 0	0 0	0 0
	.9	.1 .1	.1 .2	0 0	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	.1 .1	0 0	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.9 .9	.5 .5	1 1	1 1	0 0	.9 .9	.6 .6	.1 .1	.1 .1
	.2	1 1	.9 .9	.2 .4	1 1	1 1	0 0	.9 .9	.4 .4	0 0	.1 .1
	.3	1 1	.7 .8	.1 .4	.8 1	1 1	0 0	.6 .9	0 .3	0 0	.1 .1
	.4	.9 1	.5 .8	0 .2	.8 1	1 1	0 0	.5 .8	0 .2	0 0	0 .1
a_5	.5	.8 1	.5 .7	0 .1	.8 .8	1 1	0 0	.1 .7	0 .1	0 0	0 .1
	.6	.4 .9	.1 .5	0 0	.7 .8	1 1	0 0	0 .5	0 .1	0 0	0 .1
	.7	0 .8	0 .4	0 0	.4 .8	1 1	0 0	0 .2	0 0	0 0	0 0
	.8	0 .3	0 0	0 0	.1 .7	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	.1 .4	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	.1 .1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	.2 .2	0 0	1 1	0 0	.1 .1	.7 .7	.2 .2
	.2	1 1	.9 1	1 1	.1 .2	0 0	1 1	0 0	0 .1	.7 .7	.1 .1
	.3	.8 1	.8 1	1 1	0 .2	0 0	1 1	0 0	0 .1	.6 .7	0 .1
	.4	.6 1	.7 .9	1 1	0 .1	0 0	1 1	0 0	0 .1	.4 .7	0 .1
a_6	.5	.3 .8	.2 .9	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	.2 .6	0 0
	.6	.1 .7	.1 .6	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	.1 .4	0 0
	.7	.1 .3	.1 .3	.8 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 .3	0 0
	.8	0 .1	.1 .1	.5 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	.9	0 0	0 0	.4 .6	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	0 0	.3 .3	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	1 1	.9 .9	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	1 1	1 1	.9 .9	.9 .9	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	1 1	1 1	.9 1	.8 .9	.5 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.4	1 1	1 1	.9 1	.7 .9	.4 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
a_7	.5	1 1	1 1	.6 .9	.5 .8	.1 .6	.6 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.6	1 1	1 1	.3 .9	.3 .8	0 .4	.5 .9	1 1	1 1	1 1	1 1
	.7	1 1	.9 1	.2 .8	.1 .5	0 .3	.3 .7	1 1	1 1	1 1	.9 1
	.8	.8 1	.9 1	0 .3	0 .3	0 .2	.2 .5	1 1	1 1	1 1	.9 1
	.9	.7 1	.7 .8	0 .2	0 0	0 0	.2 .3	1 1	.9 1	.9 1	.8 1
	1	.6 .6	.7 .7	0 0	0 0	0 0	.2 .2	1 1	.8 .8	.9 .9	.8 .8
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.4 .4	1 1	.7 .7	1 1	.9 .9	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	1 1	.1 .1	1 1	.5 .6	1 1	.9 .9	1 1	1 1	1 1
	.3	.9 1	1 1	0 .1	1 1	.5 .6	1 1	.8 .9	1 1	.8 1	1 1
	.4	.9 1	.6 1	0 0	1 1	.4 .6	1 1	.7 .9	1 1	.8 1	1 1
a_8	.5	.8 1	.6 .9	0 0	1 1	.2 .5	.9 1	.1 .9	1 1	.5 .8	1 1
	.6	.7 .9	.4 .8	0 0	1 1	.2 .5	.8 1	.1 .7	1 1	.2 .8	1 1
	.7	.5 .8	.2 .6	0 0	1 1	0 .2	.4 .9	0 .3	1 1	0 .6	1 1
	.8	.2 .8	0 .4	0 0	1 1	0 .2	.2 .8	0 .1	1 1	0 .3	1 1
	.9	.2 .4	0 .2	0 0	1 1	0 0	.2 .4	0 0	1 1	0 0	1 1
	1	.2 .2	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	1 1
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.7 .7	1 1	0 0	1 1	.1 .1	.4 .4	1 1	0 0
	.2	1 1	1 1	.7 .7	1 1	0 0	1 1	.1 .1	.4 .4	1 1	0 0
	.3	1 1	1 1	.5 .7	1 1	0 0	1 1	.1 .1	.2 .4	1 1	0 0
	.4	1 1	1 1	.3 .7	1 1	0 0	1 1	0 .1	.2 .4	1 1	0 0
a_9	.5	1 1	1 1	.1 .6	.9 1	0 0	1 1	0 0	.1 .2	1 1	0 0
	.6	1 1	1 1	0 .3	.9 1	0 0	1 1	0 0	0 .2	1 1	0 0
	.7	1 1	1 1	0 .1	.7 1	0 0	1 1	0 0	0 .1	1 1	0 0
	.8	1 1	1 1	0 0	.7 .8	0 0	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0
	.9	1 1	1 1	0 0	.6 .7	0 0	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0
	1	1 1	1 1	0 0	.6 .6	0 0	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.7 .7	.8 .8	0 0	.2 .2	0 0	.8 .8	0 0	1 1
	.2	1 1	1 1	.6 .6	.8 .8	0 0	.2 .2	0 0	.7 .8	0 0	1 1
	.3	1 1	1 1	.6 .6	.4 .8	0 0	.2 .2	0 0	.5 .8	0 0	1 1
	.4	1 1	1 1	.4 .5	.2 .7	0 0	.2 .2	0 0	.4 .8	0 0	1 1
a_{10}	.5	1 1	1 1	.2 .5	.2 .3	0 0	.2 .2	0 0	.2 .7	0 0	1 1
	.6	1 1	1 1	.1 .4	.2 .2	0 0	.1 .2	0 0	.1 .5	0 0	1 1
	.7	1 1	1 1	.1 .3	.2 .2	0 0	0 .2	0 0	0 .2	0 0	1 1
	.8	1 1	1 1	0 .1	0 .2	0 0	0 .1	0 0	0 .1	0 0	1 1
	.9	1 1	1 1	0 .1	0 .2	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
	1	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1

(17.61))

$\underset{\sim}{B}$ =

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	.9 .9	.1 .1	.8 .8	1 1	.9 .9
	.2	1 1	1 1	1 1	.8 .9	.1 .1	.7 .8	1 1	.7 .8
	.3	1 1	1 1	1 1	.6 .9	0 0	.4 .8	1 1	.3 .8
	.4	1 1	1 1	.9 1	.3 .9	0 0	.1 .7	1 1	.1 7
	.5	1 1	1 1	.8 1	0 .6	0 0	.1 .4	.8 1	.1 .3
	.6	1 1	1 1	.7 1	0 .5	0 0	0 .2	.8 1	.1 .1
	.7	1 1	1 1	.3 .8	0 0	0 0	0 .1	.7 1	0 .1
	.8	1 1	1 1	.1 .7	0 0	0 0	0 0	.4 .8	0 .1
	.9	1 1	1 1	.1 .3	0 0	0 0	0 0	.3 .7	0 0
	1	1 1	1 1	.1 .1	0 0	0 0	0 0	.3 .3	0 0
b_2	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.8 .8	.8 .8	0 0	.8 .8	.9 .9	.2 .2
	.2	1 1	1 1	.7 .8	.8 .8	0 0	.6 .7	.8 .9	.2 .2
	.3	1 1	1 1	.3 .8	.7 .8	0 0	.5 .7	.4 .9	0 .1
	.4	.9 1	1 1	.1 .7	.2 .8	0 0	.3 .7	.1 .6	0 .1
	.5	.6 1	1 1	0 .4	.1 .7	0 0	0 .5	0 .5	0 0
	.6	.6 .9	1 1	0 .2	0 .3	0 0	0 .3	0 .2	0 0
	.7	.4 .7	1 1	0 .1	0 .1	0 0	0 0	0 0	0 0
	.8	.2 .7	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	.9	.2 .6	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	.2 .2	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
b_3	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	0 0	0 0	1 1	0 0	1 1	0 0	1 1	0 0
	.2	0 0	0 0	1 1	0 0	.9 1	0 0	1 1	0 0
	.3	0 0	0 0	1 1	0 0	.9 .9	0 0	1 1	0 0
	.4	0 0	0 0	1 1	0 0	.8 .9	0 0	1 1	0 0
	.5	0 0	0 0	1 1	0 0	.2 .9	0 0	1 1	0 0
	.6	0 0	0 0	1 1	0 0	.1 .7	0 0	1 1	0 0
	.7	0 0	0 0	1 1	0 0	.1 .2	0 0	.8 1	0 0
	.8	0 0	0 0	1 1	0 0	0 ..1	0 0	.1 1	0 0
	.9	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	.1 .7	0 0
	1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	.1 .1	0 0
b_4	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.8 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	.8 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	.9 1	.3 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	.7 1
	.4	.5 1	.1 .7	.9 1	1 1	1 1	.9 1	1 1	.4 1
	.5	.3 .7	0 .3	.4 1	1 1	1 1	.4 1	.8 1	0 .9
	.6	.1 .5	0 .1	.4 1	1 1	1 1	.2 .9	.7 1	0 .6
	.7	0 .4	0 0	.1 .4	1 1	1 1	0 .6	.5 1	0 0
	.8	0 .2	0 0	0 .4	1 1	1 1	0 .2	.4 .8	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	.3 .4	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	.3 .3	0 0

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_5	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.8 .8	.3 .3	1 1	1 1	1 1	1 ·1	1 1	1 1
	.2	.6 .7	.2 .2	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	.6 .7	0 .2	.9 1	1 1	1 1	.9 1	1 1	.6 1
	.4	.5 .6	0 .2	.6 1	1 1	1 1	.8 1	1 1	.3 1
	.5	.4 .6	0 .1	.5 1	1 1	1 1	.5 1	1 1	.1 .7
	.6	0 .6	0 0	.4 .6	1 1	1 1	.3 .9	1 1	0 .4
	.7	0 .3	0 0	.1 .6	1 1	1 1	0 .6	1 1	0 .1
	.8	0 0	0 0	0 .5	1 1	1 1	0 .3	1 1	0 0
	.9	0 0	0 0	0 .1	1 1	1 1	0 0	.8 1	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	.8 .8	0 0
b_6	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.9 .9	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	.8 .9	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	.3 .9	1 1	1 1	.5 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.4	.1 .8	.8 1	1 1	.3 1	1 1	1 1	1 1	.8 1
	.5	0 .4	.5 1	.5 1	.3 .5	.7 1	1 1	1 1	.4 1
	.6	0 .1	.3 .8	.1 1	0 .3	.5 1	1 1	.9 1	.2 .8
	.7	0 0	.1 .6	0 .6	0 .3	.2 1	1 1	.3 .9	0 .6
	.8	0 0	.1 .3	0 .1	0 0	0 .7	1 1	.1 .9	0 .2
	.9	0 0	.1 .1	0 0	0 0	0 0	1 1	.1 .4	0 0
	1	0 0	.1 .1	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0
b_7	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	0 0	0 0	.9 .9	1 1	.1 .1	.1 .1	1 1	1 1
	.2	0 0	0 0	.9 .9	1 1	.1 .1	.1 .1	1 1	.8 .9
	.3	0 0	0 0	.7 .9	.8 .9	0 .1	0 .1	1 1	.6 .9
	.4	0 0	0 0	.5 .9	.5 .9	0 .1	0 .1	1 1	.6 .9
	.5	0 0	0 0	.1 .8	.3 .9	0 0	0 0	1 1	.1 .6
	.6	0 0	0 0	0 .6	.1 .6	0 0	0 0	1 1	0 .6
	.7	0 0	0 0	0 .3	0 .3	0 0	0 0	1 1	0 .1
	.8	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0	1 1	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0
b_8	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.2 .2	1 1	1 1	.5 .5	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	.1 .1	1 1	.9 1	.4 .5	.9 1	1 1	1 1
	.3	.5 1	0 .1	1 1	.6 1	.2 .5	.6 1	.9 1	1 1
	.4	.1 1	0 .1	.7 1	.4 1	.1 .4	.3 .9	.7 1	1 1
	.5	.1 .8	0 0	.3 1	.2 .7	0 .3	0 .7	.2 1	1 1
	.6	0 .1	0 0	0 .9	.1 .6	0 .1	0 .5	.1 .8	1 1
	.7	0 .1	0 0	0 .4	0 .2	0 0	0 .1	0 .4	1 1
	.8	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0	0 0	1 1
	.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1

(17.62)

El proceso de obtención de las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*_\alpha$ nivel a nivel comporta realizar en primer lugar la convolución maxmin de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\alpha$ y $\underset{\sim}{\mathcal{M}}_\alpha$ y con los resultados hallados a todos los niveles $\alpha = 1, 0.9, 0.8, \ldots, 0.2, 0.1$, proceder de nuevo a la convolución con $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_\alpha$. El resultado $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\alpha \circ \underset{\sim}{\mathcal{M}}_\alpha \circ \underset{\sim}{\mathcal{B}}_\alpha = \underset{\sim}{\mathcal{M}}^*_\alpha$ proporcionará los efectos acumulados de primera y segunda generación.

En esta ocasión hemos omitido el detalle de los cálculos, que consideramos resultarían reiterativos, pasando directamente a los resultados los cuales presentamos de (17.63) a (17.71).

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{1} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.7	.7	.4	0	0	0	.8	0
a_2	.7	.7	.4	0	0	0	.8	.7
a_3	0	0	.3	0	0	0	.4 .6	0
a_4	0	0	0	0	0	0	0	1
a_5	0	0	0	0	0	0	0	1
a_6	0	0	.3	0	0	0	.3	0
a_7	.6	.6	.4	.9	.9	0	.8	.1 .2
a_8	.2	.2	.2	1	1	0	.8 .9	.5 .6
a_9	.7	.7	.4	.9	.9	0	.8	.5 .6
a_{10}	.7	.7	.4	1	1	0	.8	0

(17.63)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.9} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.9 1	.9 1	.4 .7	0 .1	0 .1	0	.8 1	0 .1
a_2	.9 1	.9 1	.4 .7	.1 .2	.1 .2	0	.8 1	.5 .6
a_3	0	0	.3 5	0	0	0	.5 .8	0
a_4	.1	.1	.1	0 .1	0 .1	0	.2	1
a_5	0	0	0	0	0	0	.2	1
a_6	0	0	.3 .5	.1	.1	0	.4 .6	0
a_7	.7 1	.7 1	.4 .7	.9 1	.9 1	0	.8 1	.2 .8
a_8	.2 .4	.2 .4	.2 .4	1	1	0	1	.7 .9
a_9	.9 1	.9 1	.4 .7	.9 1	.9 1	0	.8 1	.6 .7
a_{10}	.9 1	.9 1	.4 .7	1	1	0	1	0 .2

(17.64)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.8} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	.5 .9	0 .5	0 .5	0 .3	1	0 .2
a_2	1	1	.5 .9	.1 .5	.1 .5	0 .3	1	.5 .6
a_3	0 .2	0 .2	.3 .9	0 .4	0 .4	0 .3	.7 1	0 .1
a_4	.1 .5	.1 .5	.1 .5	0 .3	0 .3	0 .3	.2 .5	1
a_5	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	.2 .5	1
a_6	0 .2	0 .2	.3 .9	.1 .5	.1 .5	0 .3	.5 1	0 .1
a_7	.8 1	.8 1	.5 .9	.9 1	.9 1	0 .3	.9 1	.6 1
a_8	.2 .8	.2 .8	.2 .8	1	1	0 .3	1	.9 1
a_9	1	1	.5 .9	.9 1	.9 1	0 .3	1	.7 .8
a_{10}	1	1	.5 .9	1	1	0 .3	1	0 .2

(17.65)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.7} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	.8 1	.1 .8	.1 .8	0 .6	1	.1 .4
a_2	1	1	.8 1	.2 .9	.2 .9	0 .6	1	.6 .8
a_3	0 .4	0 .4	.6 1	.1 .9	.1 .9	0 .6	.8 1	0 .4
a_4	.2 .8	.2 .8	.2 .8	.1 .8	.1 .8	0 .6	.3 .8	1
a_5	0 .8	0 .8	0 .8	0 .8	0 .8	0 .6	.3 .8	1
a_6	.1 .4	.1 .3	.6 1	.1 .9	.1 .9	0 .6	.8 1	.1 .3
a_7	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.8 1
a_8	.5 .8	.5 .8	.5 .8	1	1	0 .6	1	1
a_9	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.7 1
a_{10}	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.2 .6

(17.66)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.6} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	.6 .9	.6 .9	.3 .9	1	.2 .8
a_2	1	1	1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.7 1
a_3	.3 .7	.3 .7	.9 1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.2 .7
a_4	.5 1	.5 1	.5 1	.4 .9	.4 .9	.3 .9	.6 1	1
a_5	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.3 .9	.6 1	1
a_6	.3 .7	.3 .7	.9 1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.2 .7
a_7	1	1	1	1	1	.4 .9	1	1
a_8	.7 .9	.7 .9	.7 1	1	1	.4 .9	1	1
a_9	1	1	1	1	1	.3 .9	1	.9 1
a_{10}	1	1	1	1	1	.4 .9	1	.2 .8

(17.67)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.5} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	.6 1	.6 1	.5 1	1	.5 1
a_2	1	1	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.8 1
a_3	.4 .9	.3 .9	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.4 .9
a_4	.8 1	.8 1	.8 1	.6 1	.6 1	.5 1	.8 1	1
a_5	.8 1	.8 1	.8 1	.6 1	.6 1	.5 1	.8 1	1
a_6	.4 .8	.3 .8	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.4 .9
a_7	1	1	1	1	1	.5 1	1	1
a_8	.8 1	.8 1	.8 1	1	1	.5 1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	.5 1	1	.9 1
a_{10}	1	1	1	1	1	.5 1	1	.5 1

(17.68)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.4} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	.8 1	.8 1	.8 1	1	.8 1
a_2	1	1	1	1	1	.8 1	1	.9 1
a_3	.7 1	.7 1	1	1	1	.8 1	1	.7 1
a_4	1	1	1	.8 1	.8 1	.8 1	1	1
a_5	.9 1	.9 1	.9 1	.8 1	.8 1	.8 1	1	1
a_6	.6 1	.6 1	1	1	1	.8 1	1	.7 1
a_7	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_8	.9 1	.9 1	1	1	1	.9 1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_{10}	1	1	1	1	1	.9 1	1	.8 1

(17.69)

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^{*}_{0.3} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_2	1	1	1	1	1	1	1	1
a_3	.9 1	.9 1	1	1	1	.9 1	1	.9 1
a_4	1	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_6	.8 1	.8 1	1	1	1	.9 1	1	.9 1
a_7	1	1	1	1	1	1	1	1
a_8	.9 1	.9 1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	1	1	1
a_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1

(17.70)

$$
\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{*}_{0.2} =
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\
\hline
a_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_{10} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

(17.71)

Dado que en la totalidad de las casillas de las matrices $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{*}_{0.1}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{*}_{0}$ aparecerían únicamente unos, vamos a obviar su inclusión de manera explícita.

Recogiendo ahora todas las informaciones suministradas por las matrices (17.63) a (17.71) se puede reconstruir el expertón que se presenta en (17.72).

$\underset{\sim}{\mathfrak{M}} * =$

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
	.4	1	1	1	.8 1	.8 1	.8 1	1	.8 1
a_1	.5	1	1	1	.6 1	.6 1	.5 1	1	.5 1
	.6	1	1	1	.6 .9	.6 .9	.3 .9	1	.2 .8
	.7	1	1	.8 1	.1 .8	.1 .8	0 .6	1	.1 .4
	.8	1	1	.5 .9	0 .5	0 .5	0 .3	1	0 .2
	.9	.9 1	.9 1	.4 .7	0 .1	0 .1	0	.8 1	0 .1
	1	.7	.7	.4	0	0	0	.8	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	1	1	.8 1	1	.9 1
a_2	.5	1	1	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.8 1
	.6	1	1	1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.7 1
	.7	1	1	.8 1	.2 .9	.2 .9	0 .6	1	.6 .8
	.8	1	1	.5 .9	.1 .5	.1 .5	0 .3	1	.5 .6
	.9	.9 1	.9 1	.4 .7	.1 .2	.1 .2	0	.8 1	.5 .6
	1	.7	.7	.4	0	0	0	.8	.4
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	.9 1	.9 1	1	1	1	.9 1	1	.9 1
	.4	.7 1	.7 1	1	1	1	.8 1	1	.7 1
a_3	.5	.4 .9	.3 .9	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.4 .9
	.6	.3 .7	.3 .7	.9 1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.2 .7
	.7	0 .4	0 .4	.6 .1	.1 .9	.1 .9	0 .6	.8 1	0 .4
	.8	0 .2	0 .2	.3 .9	0 .4	0 .4	0 .3	.7 1	0 .1
	.9	0	0	.3 .5	0	0	0	.5 .8	0
	1	0	0	.3	0	0	0	.4 .6	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	.8 1	.8 1	.8 1	1	1
a_4	.5	.8 1	.8 1	.8 1	.6 1	.6 1	.5 1	.8 1	1
	.6	.5 1	.5 1	.5 1	.4 .9	.4 .9	.3 .9	.6 1	1
	.7	.2 .8	.2 .8	.2 .8	.1 .8	.1 .8	0 .6	.3 .8	1
	.8	.1 .5	.1 .5	.1 .5	0 .3	0 .3	0 .3	.2 .5	1
	.9	.1	.1	.1	0 .1	0 .1	0	.2	1
	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
	.4	.9 1	.9 1	.9 1	.8 1	.8 1	.8 1	1	1
a_5	.5	.8 1	.8 1	.8 1	.6 1	.6 1	.5 1	.8 1	1
	.6	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.3 .9	.6 1	1
	.7	0 .8	0 .8	0 .8	0 .8	0 .8	0 .6	.3 .8	1
	.8	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	.2 .5	1
	.9	0	0	0	0	0	0	.2	1
	1	0	0	0	0	0	0	0	1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	.8 1	.8 1	1	1	1	.9 1	1	.9 1
	.4	.6 1	.6 1	1	1	1	.8 1	1	.7 1
a_6	.5	.4 .8	.3 .8	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.4 .9
	.6	.3 .7	.3 .7	.9 1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.2 .7
	.7	.1 .4	.1 .3	.6 1	.1 .9	.1 .9	0 .6	.8 .1	.1 .3
	.8	0 .2	0 .2	.3 .9	.1 .5	.1 .5	0 .3	.5 1	0 .1
	.9	0	0	.3 .5	.1	.1	0	.4 .6	0
	1	0	0	.3	0	0	0	.3	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_7	.5	1	1	1	1	1	.5 1	1	1
	.6	1	1	1	1	1	.4 .9	1	1
	.7	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.8 1
	.8	.8 1	.8 1	.5 .9	.9 1	.9 1	0 .3	.9 1	.6 1
	.9	.7 1	.7 1	.4 .7	.9 1	.9 1	0	.8 1	.2 .8
	1	.6	.6	.4	.9	.9	0	.8	.1 .2
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	.9 1	.9 1	1	1	1	1	1	1
	.4	.9 1	.9 1	1	1	1	.9 1	1	1
a_8	.5	.8 1	.8 1	.8 1	1	1	.5 1	1	1
	.6	.7 .9	.7 .9	.7 1	1	1	.4 .9	1	1
	.7	.5 .8	.5 .8	.5 .8	1	1	0 .6	1	1
	.8	.2 .8	.2 .8	.2 .8	1	1	0 .3	1	.9 1
	.9	.2 .4	.2 .4	.2 .4	1	1	0	1	.7 .9
	1	.2	.2	.2	1	1	0	.8 .9	.5 .6
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_9	.5	1	1	1	1	1	.5 1	1	.9 1
	.6	1	1	1	1	1	.3 .9	1	.9 1
	.7	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.7 1
	.8	1	1	.5 .9	.9 1	.9 1	0 .3	1	.7 .8
	.9	.9 1	.9 1	.4 .7	.9 1	.9 1	0	.8 1	.6 .7
	1	.7	.7	.4	.9	.9	0	.8	.5 .6
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	1	1	.9 1	1	.8 1
a_{10}	.5	1	1	1	1	1	.5 1	1	.5 1
	.6	1	1	1	1	1	.4 .9	1	.2 .8
	.7	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.2 .6
	.8	1	1	.5 .9	1	1	0 .3	1	0 .2
	.9	.9 1	.9 1	.4 .7	1	1	0	1	0 .2
	1	.7	.7	.4	1	1	0	.8	0

(17.72)

Procedamos ahora a desacumular $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ que se ha representado en (17.60) y también $\underset{\sim}{\mathcal{M}}^*$ representada en (17.72) con lo que se obtendrán (17.73) y (17.74). Se podrá observar que los elementos de la matriz (17.73) son iguales a los de la matriz (17.11) divididos por 10 (número de expertos consultados).

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0								
	.1						.2		
	.2				.1 .1		.4 .3		
	.3				.4	.2	.3 .2		.2
	.4				.4 .1	.2	.4		.3
a_1	.5				.1 .6	.2 .1			.3 .2
	.6			.2	.1	.3 .1	.1		.1 .4
	.7			.3 .1	.1	.1 .5			.1 .3
	.8	.1	.4 .2	.1 .2		.3	.1	.2	
	.9	.2 .3	.5 .7	.3				.2	.1
	1	.7 .7	.1 .1	.4 .4				.8 .8	
	0	.4 .4	.7 .7				.3 .2		.7 .7
	.1	.4 .1	.1			.2 .1	.3 .2		.3 .3
	.2	.1 .3	.2 .1	.1		.4 .1	.2 .1	.2	
	.3	.1 .1	.2	.1	.2	.2	.2 .1	.1	
	.4	.1		.3 .1	.4 .1	.2 .2	.1	.4	
a_2	.5			.2	.3 .2	.3	.3	.1 .1	
	.6			.3 .5	.1 .2	.3		.3 .4	
	.7			.1	.4			.2	
	.8			.3				.2	
	.9				.1				
	1								
	0		.6 .6			.1 .1	.1 .1		
	.1	.1 .1	.1 .1				.5 .4		
	.2	.2	.3 .2		.2	.1 .1	.2 .1		.1 .1
	.3	.2 .1	.1		.2	.1	.1		.2
	.4	.2 .2			.2	.2	.2 .1		.3 .1
a_3	.5	.1		.1		.5 .2	.1		.2 .3
	.6	.3 .2		.3	.6 .1	.4	.1	.2	.2 .2
	.7	.1		.3 .1	.4	.2		.1	.3
	.8	.2		.4	.3			.2 .2	
	.9			.2				.1 .2	
	1			.3 .3				.4 .6	
	0	.5 .5	1 1	.4 .4	.4 .4		.1 .1		
	.1	.2 .1		.4 .2	.1 .1	.1	.3 .3		
	.2	.1 .1		.1 .1	.2	.1	.2		
	.3	.2 .1		.1 .2	.2 .1	.2	.1	.1	
	.4	.1		.1	.1	.4	.2	.2	
a_4	.5	.1			.1 .2	.3 .2	.2	.1 .2	
	.6				.1	.4	.1 .2	.4	
	.7					.2	.1	.2 .3	.1
	.8					.1	.1	.4	.2 .1
	.9							.1	.2 .3
	1								.5 .6
	0	.6 .6	.9 .9	.7 .7	.5 .5	.7 .7	.1 .1		
	.1	.1 .1			.1 .1	.2 .1	.2 .1		
	.2		.1 .1	.1	.1	.1	.2		
	.3	.1		.1	.2	.1	.3 .3		
	.4	.2 .1		.1	.1 .1	.1	.1 .1	.3	
a_5	.5	.1		.1 .1	.1		.1	.2	
	.6			.1	.1		.4	.2 .2	
	.7				.1			.1 .4	
	.8	.1						.2	
	.9							.2 .2	
	1								1 1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0	.1 .1	1 1		.1 .1		.6 .6		1 1
	.1	.4 .3			.1		.1 .1		
	.2	.2 .2			.1 .1			.3	
	.3	.2 .1			.1		.3	.1 .2	
	.4	.1		.3	.2 .1	.3		.3	
a_6	.5	.1 .2		.1	.3 .2	.1	.2	.1 .2	
	.6			.4 .3	.2	.5 .1	.1	.1 .2	
	.7			.1 .3	.2	.4		.2	
	.8			.1 .4	.1	.1 .4		.1	
	.9				.1	.1		.1 .1	
	1								
	0	.1 .1	.7 .7						
	.1		.2 .1						
	.2		.1 .1		.1		.1		
	.3		.1				.1		
	.4	.4		.3	.2 .1		.7		
a_7	.5	.3		.2 .1	.2	.2	.6		
	.6	.2 .2		.3 .1	.1	.4 .1	.1 .1	.1	.2
	.7	.4		.5	.2 .2	.2	.1	.2	.2
	.8	.3		.1 .1	.2 .4	.2 .4	.2	.1 .1	.4 .2
	.9			.1 .2	.2	.2 .1		.4 .6	.1 .6
	1				.1	.2		.2 .3	.1 .2
	0		1 1			.1 .1	.2 .2		.8 .8
	.1			.2	.1	.1 .1	.2 .1		.2 .2
	.2	.1		.1 .1			.3		
	.3	.4 .1		.1 .2	.1 .1	.3	.2 .1		
	.4	.2		.2 .1	.2	.1 .2	.1 .4		
a_8	.5	.2 .2		.1 .1		.2 .1	.1		
	.6	.1 .3		.3	.1 .3	.1	.1	.1	
	.7	.4		.4	.2 .1	.2			
	.8			.1	.2 .3	.1 .2		.2 .1	
	.9				.1	.1			
	1				.1 .1			.7 .9	
	0	1 1	1 1	.4 .4			.2 .2		1 1
	.1			.3 .1					
	.2			.1			.1		
	.3			.2 .1			.1		
	.4			.4			.1		
a_9	.5						.3 .1		
	.6				.2		.2 .3	.1	
	.7				.1	.1	.4	.1	
	.8				.1			.2 .1	
	.9					.1		.2 .5	
	1				.8 .8	.9 .9		.4 .4	
	0	1 1	1 1	.7 .7					1 1
	.1			.2 .1					
	.2						.1		
	.3			.1			.2		
	.4			.1			.3		
a_{10}	.5			.1			.2		
	.6						.4 .2		
	.7						.5		
	.8					.1	.1		
	.9					.1		.3 .3	
	1				1 1	.9 .9		.7 .7	

(17.73) desacumulación de $\mathfrak{M}$

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0								
	.1						.1		
	.2				.2	.2	.1		
	.3				.2	.2	.3		.2
	.4				.1	.1	.2 .1		.3
a_1	.5				.5 .1	.5 .1	.3 .3		.3 .2
	.6			.2	.1 .3	.1 .3	.3		.1 .4
	.7			.3 .1	.4	.4	.3		.1 .2
	.8	.1	.1	.1 .2	.1	.1		.2	.1
	.9	.2 .3	.2 .3	.3				.2	.1
	1	.7 .7	.7 .7	.4 .4				.8 .8	
	0								
	.1								
	.2								
	.3						.2		.1
	.4				.3	.3	.3		.1
a_2	.5				.1	.1	.2 .1		.1
	.6			.2	.4 .1	.4 .1	.3 .3		.1 .2
	.7			.3 .1	.1 .4	.1 .4	.3		.1 .2
	.8	.1	.1	.1 .2	.3	.3	.3	.2	
	.9	.2 .3	.2 .3	.3	.1 .2	.1 .2		.2	.1 .2
	1	.7 .7	.7 .7	.4 .4				.8 .8	.4 .4
	0								
	.1								
	.2	.1	.1				.1		.1
	.3	.2	.2				.1		.2
	.4	.3 .1	.4 .1		.3	.3	.3		.3 .1
a_3	.5	.1 .2	.2	.1	.1	.1	.2 .1		.2 .2
	.6	.3 .3	.3 .3	.3	.5 .1	.5 .1	.3 .3	.2	.2 .3
	.7	.2	.2	.3 .1	.1 .5	.1 .5	.3	.1	.3
	.8	.2	.2	.4	.4	.4	.3	.2 .2	.1
	.9			.2				.1 .2	
	1			.3 .3				.4 .6	
	0								
	.1								
	.2								
	.3				.2	.2	.2		
	.4	.2	.2	.2	.2	.2	.3	.2	
a_4	.5	.3	.3	.3	.2 .1	.2 .1	.2 .1	.2	
	.6	.3 .2	.3 .2	.3 .2	.3 .1	.3 .1	.3 .3	.3 .2	
	.7	.1 .3	.1 .3	.1 .3	.1 .5	.1 .5	.3	.1 .3	
	.8	.4	.4	.4	.2	.2	.3	.3	
	.9	.1 .1	.1 .1	.1 .1	.1	.1		.2 .2	
	1								1 1
	0								
	.1								
	.2						.1		
	.3	.1	.1	.1	.2	.2	.1		
	.4	.1	.1	.1	.2	.2	.3	.2	
a_5	.5	.4 .1	.4 .1	.4 .1	.2 .1	.2 .1	.2 .1	.2	
	.6	.4 .1	.4 .1	.4 .1	.4 .1	.4 .1	.3 .3	.3 .2	
	.7	.5	.5	.5	.5	.5	.3	.1 .3	
	.8	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	
	.9							.2 .2	
	1								1 1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0								
	.1								
	.2	.2	.2				.1		.1
	.3	.2	.2				.1		.2
	.4	.2 .2	.3 .2		.3	.3	.3		.3 .1
a_6	.5	.1 .1	.1	.1	.1	.1	.2 .1		.2 .2
	.6	.2 .3	.2 .4	.3	.5 .1	.5 .1	.3 .3	.2	.1 .4
	.7	.1 .2	.1 .1	.3 .1	.4	.4	.3	.3	.1 .2
	.8	.2	.2	.4	.4	.4	.3	.1 .4	.1
	.9			.2	.1 .1	.1 .1		.1 .3	
	1			.3 .3				.3 .3	
	0								
	.1								
	.2								
	.3						.1		
	.4						.4		
a_7	.5						.1 .1		
	.6			.2			.4 .3		.2
	.7	.2	.2	.3 .1	.1	.1	.3	.1	.2
	.8	.1	.1	.1 .2			.3	.1	.4 .2
	.9	.1 .4	.1 .4	.3	.1	.1		.2	.1 .6
	1	.6 .6	.6 .6	.4 .4	.9 .9	.9 .9		.8 .8	.1 .2
	0								
	.1								
	.2	.1	.1						
	.3						.1		
	.4	.1	.1	.2			.4		
a_8	.5	.1 .1	.1 .1	.1			.1 .1		
	.6	.2 .1	.2 .1	.2 .2			.4 .3		
	.7	.3	.3	.3			.3		.1
	.8	.4	.4	.4			.3		.2 .1
	.9	.2	.2	.2				.2 .1	.2 .3
	1	.2 .2	.2 .2	.2 .2	1 1	1 1		.8 .9	.5 .6
	0								
	.1								
	.2								
	.3						.1		
	.4						.4		.1
a_9	.5						.2 .1		
	.6			.2			.3 .3		.2
	.7			.3 .1	.1	.1	.3		.2
	.8	.1	.1	.1 .2			.3	.2	.1 .1
	.9	.2 .3	.2 .3	.3	.1	.1		.2	.1 .1
	1	.7 .7	.7 .7	.4 .4	.9 .9	.9 .9		.8 .8	.5 .6
	0								
	.1								
	.2								
	.3						.1		.2
	.4						.4		.3
a_{10}	.5						.1 .1		.3 .2
	.6			.2			.4 .3		.2
	.7			.3 .1			.3		.2 .4
	.8	.1	.1	.1 .2			.3		
	.9	.2 .3	.2 .3	.3				.2 .2	.2
	1	.7 .7	.7 .7	.4 .4	1 1	1 1		.8 .8	

desacumulación de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ (17.74)

Una vez realizadas las desacumulaciones se procede a calcular las esperanzas matemáticas para las probabilidades inferiores y superiores de las matrices $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ y $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*$.

En lo que se refiere a la esperanza matemática de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$, $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ los cálculos nos llevan al mismo resultado obtenido en (17.52) al coincidir con la media $M(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ Hemos incluído las esperanza matemática de $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*$, $\varepsilon(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*)$ en (17.75).

$\varepsilon(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*)$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.51,.73	.51,.73	.45,.68	.96,.98	.46,.65
a_2	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.57,.76	.57,.76	.46,.68	.96,.98	.74,.84
a_3	.43,.62	.42,.62	.74,.87	.54,.73	.54,.73	.45,.68	.84,.94	.42,.61
a_4	.57,.74	.57,.74	.57,.74	.49,.71	.49,.71	.46,.68	.61,.75	1
a_5	.51,.70	.51,.70	.51,.70	.48,.70	.48,.70	.45,.68	.61,.75	1
a_6	.42,.61	.41,.60	.74,.87	.56,.75	.56,.68	.45,.68	.80,.89	.43,.60
a_7	.91,.96	.91,.96	.81,.90	.97,.99	.97,.99	.48,.68	.95,.98	.77,.90
a_8	.64,.81	.64,.81	.66,.82	1	1	.48,.68	.98,.99	.91,.95
a_9	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.97,.99	.97,.99	.47,.68	.96,.98	.83,.91
a_{10}	.96,.97	.96,.97	.81,.90	1	1	.48,.68	.98	.47,.68

(17.75)

De la misma manera que en el procedimiento abreviado, en el que se utilizaban las medias, tambien ahora se puede hacer caer la entropía para obtener, mediante un sólo número, la representación de los efectos acumulados de primera y segunda generación, en cada una de las relaciones de incidencia que representan las casillas de las matrices.

Para ello se puede considerar, como representativo de cada intervalo, su punto medio. Se obtienen así dos nuevas matrices, la $\overline{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ que coincide con la $\overline{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ representada en (17.57) y la $\overline{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*)$ que incluímos en (17.76).

$\bar{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.965	.965	.855	.620	.620	.565	.970	.555
a_2	.965	.965	.855	.665	.665	.570	.970	.790
a_3	.525	.520	.805	.635	.635	.565	.890	.515
a_4	.655	.655	.655	.600	.600	.570	.680	1
a_5	.605	.605	.605	.590	.590	.565	.680	1
a_6	.515	.505	.805	.655	.620	.565	.845	.515
a_7	.935	.935	.855	.980	.980	.580	.965	.835
a_8	.725	.725	.740	1	1	.580	.985	.930
a_9	.965	.965	.855	.980	.980	.575	.970	.870
a_{10}	.965	.965	.855	1	1	.580	.980	.575

(17.76)

Las cifras que aparecen en la matriz (17.76) son muy cercanas a las halladas en la matriz (17.58) que representa $\overline{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*)$. Es por ello que, si se obtiene la diferencia $\bar{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*) - \bar{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$, el resultado es sensiblemente igual al obtenido al hacer $\overline{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*) - \overline{M}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ reflejado en (17.50), lo que pone de manifiesto que en este caso el método aproximado, mediante medias, resulta suficiente para la obtención de los efectos olvidados.

En efecto, si explicitáramos la matriz $\bar{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*) - \bar{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ lo cual no hacemos para evitar alargar demasiado este epígrafe, se observaría que aparecen como efectos olvidados más importantes el $(a_9 \rightarrow b_1)$, $(a_9 \rightarrow b_2)$, $(a_{10} \rightarrow b_1)$ y $(a_{10} \rightarrow b_2)$ seguidos del $(a_8 \rightarrow b_8)$ y $(a_2 \rightarrow b_2)$, tal como sucedía en el método aproximado e incluso, en este caso, con el mismo grado de olvido. Se han marcado con un círculo las correspondientes casillas en la matriz de efectos acumulados de 1ª y 2ª generación $\bar{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}}^*)$. La diferencia con respecto a las casillas de $\bar{\varepsilon}(\underset{\sim}{\mathfrak{M}})$ daría (0.965) para los 4 primeros efectos olvidados, (0.910) para el quinto y (0.900) para el sexto.

Es evidente que en otros supuestos que pueden plantearse, utilizando los expertones para la recuperación de efectos olvidados, podrían aparecer resultados sensiblemente distintos al seguir uno u otro de los caminos que se han expuesto. Además el método genuino que acabamos de presentar pone de manifiesto toda la riqueza de información, que los expertones guardan hasta el final del modelo.

Finalmente parece conveniente señalar que esta aplicación al campo de la incidencia de los distintos aspectos de la actividad de la empresa sobre los objetivos que ésta pretende alcanzar, ha resultado fructífera para detectar "efectos olvidados". Se trata, claro está, de una primera aproximación, pero estamos convencidos de que puede abrir un nuevo camino en el estudio de un problema tan importante como el de la relación entre medios y fines.

Consideraciones finales

Hemos intentado a lo largo de las páginas que anteceden realizar una descripción de un conjunto de técnicas aptas para el tratamiento de ciertos problemas que se pueden plantear en las relaciones de causa a efecto. Son muchos los ámbitos de la actividad humana en los que surge la necesidad de hallar cuales son las incidencias de determinados elementos sobre sí mismos y sobre otros elementos. En este caso, cuando se pretende establecer una ordenación de las incidencias directas basta con un simple cuadro de doble entrada; pero lo que ya no resulta tan fácil es determinar las incidencias que se acumulan como consecuencia de que puede existir una relación de causa a efecto a través de otro elemento interpuesto.

En supuestos muy simplificados, cuando las causas son pocas y son reducidos en número los efectos que provocan, cabría establecer de manera intuitiva no sólo las relaciones directas sino incluso también las de segunda generación. Pero en la actividad normal de los hombres, tanto en lo que se refiere a sus relaciones sociales como dentro del campo de la gestión, existen, evidentemente, numerosas interconexiones entre un elevado número de fenómenos, que unas veces actúan como causa y otras como efecto. Esta intrincada red hace que resulte prácticamente imposible para el cerebro humano poder establecer todas y cada una de las conexiones indirectas que se producen en las relaciones de causa-efecto. Se hace así necesaria la ayuda de algun tipo de mecanismo capaz de realizar estas funciones que el hombre por sí sólo no puede ejecutar, por lo menos, con carácter exhaustivo.

Habida cuenta que en la actualidad disponemos de medios de tratamiento de la información capaces de realizar una gran cantidad de operaciones en un tiempo extremadamente reducido, podemos recurrir a ellos, para conseguir que actuen como apéndice de nuestro pensamiento ejecutando aquellas tareas que no exigen la intervención de esta "golden box" que es nuestra imaginación, dejando que el hombre realice aquellas funciones en las que las máquinas no pueden intervenir.

Es en este sentido que nuestros trabajos de investigación nos han llevado a elaborar un grupo de modelos que hemos denominado "modelos para la investigación de efectos olvidados". Su soporte se halla constituído por técnicas que hemos empleado en otras ocasiones para el tratamiento de la incertidumbre (1) entre las que figuran la teoría de los subconjuntos borrosos, en la parte correspondiente a matrices borrosas y matrices Φ-borrosas cuando se ha aplicado el grado de libertad en las valuaciones de los expertos utilizando para ello intervalos de confianza. Estos dos grupos de técnicas comportan que la asignación de estimaciones subjetivas

(1) KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J.: Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre. Ed. Hispano Europea. Barcelona, 1987

sea realizada por parte de un experto o por parte de varios expertos los cuales realizan su valuación de manera conjunta.

Se han puesto de manifiesto, también, otras técnicas que abren un campo a la posibilidad de que los expertos, sin conexión entre sí, emitan individualmente sus opiniones, de tal manera que la agregación se realiza posteriormente. Desde esta perspectiva hemos considerado dos posibilidades. La primera exige la elaboración de una estadística para hallar el número de expertos que han asignado una misma valuación a cada una de las relaciones de incidencia, a partir de la cual se obtienen unas probabilidades. Se une así una técnica relativa al ámbito del azar y una técnica apta para el tratamiento de la incertidurmbre, sin que ambas se mezclen, dando lugar a la utilización de matrices aleatorias borrosas. La segunda representa una ampliación a la anteriormente descrita ya que permite, manteniendo también la opinión separada de los expertos, que sus valuaciones se realicen a través de intervalos de confianza, con lo que nos introducimos en el campo de aplicación de matrices por expertones.

Este trabajo ha sido estructurado en dos niveles, que coinciden con las dos partes en que ha sido dividido. El primero teórico y el segundo de aplicación a aspectos específicos. En la primera parte se establecen los modelos teóricos previos y su justificación, de donde surge un conjunto de técnicas con un amplio abanico de posibilidades de utilización en aspectos muy diferenciados de la realidad.

En una segunda parte se incluyen algunas aplicaciones de estas técnicas a problemas concretos. Resulta evidente que sólo constituyen una muestra de las muchas posibilidades que existen en la amplia fenomenología del mundo en que nos ha tocado vivir, pero las obvias necesidades de un texto como el que presentamos ha aconsejado que nos limitáramos a cuatro aplicaciones concretas. Hemos escogido como primera de ellas un aspecto, poco tratado en las obras dedicadas a la gestión, relativo al ámbito electoral. Se trata, como ha podido observarse, de establecer las relaciones de incidencia entre acciones típicas de una campaña electoral y sus efectos primarios, sus efectos acumulados (los de primera y segunda generación), así como de la escisión de estos últimos de las incidencias de segunda generación, que ponen de manifiesto aquellos efectos que inicialmente habían sido olvidados y que a través de este esquema han podido ser recuperados. A parte de este supuesto, que escapa en cierto modo al ámbito estricto de gestión de las empresas, hemos presentado tres aspectos muy típicos de la economía de la empresa: un problema financiero, un problema de mercados y un problema de política económica tan conocido como la relación existente entre medios y fines dentro de la actividad empresarial.

Somos conscientes que estas aplicaciones que se han presentado son una mínima muestra de las amplias posibilidades que tienen este grupo de técnicas en el ámbito social en el que nos movemos. A título de ejemplo, basta con imaginar las posibilidades que surgen frente a los problemas que se plantean en el ámbito de la medicina. Existen una infinidad de causas (medicamentos, dietas, drogas, bebidas,...) que producen en el cuerpo humano ciertos efectos directos (disminución de la fiebre, adelgazamiento, disminución de las defensas...) Se han estudiado en este campo, afortunadamente con grandes éxitos en muchas ocasiones, las relaciones de causa a efecto, pero creemos que quedan muchas posibilidades de estudio, sobre todo en lo que se refiere a los efecto de segunda generación, los cuales, por la gran complejidad de las interacciones en el cuerpo humano, resultan muy difíciles de poder establecer sin la ayuda de determinados mecanismos, como los que en esta obra se proponen. Se trata de un planteamiento muy simplificado, evidentemente, pero que puede ser indicativo para despertar el interés de quienes se hallan preocupados en poner de manifiesto los intrincados mecanismos del cuerpo humano y las relaciones de causa a efecto que existen entre los mismos.

Podriamos seguir enumerando otros muchos campos en los cuales la existencia de relaciones de causa a efecto permiten el estudio de las incidencias de segunda generación. Pero creemos que habida cuenta de que el objetivo primario de este trabajo es plantear una primera aproximación al establecimiento de unos dispositivos abiertos a nuevas investigaciones, se va a conseguir en el futuro un amplio desarrollo de estas técnicas que no dudamos permitirán abrir su campo de aplicación dando lugar a un mejor conocimiento de los mecanismos humanos, económicos y sociales que redundarán en una mejora del bienestar individual y de nuestra sociedad.